Basis og dimensjon

NTNU, Institutt for matematiske fag

Oktober, 2009

Basis

Basis for vektorrom: En endelig mengde $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ av vektorer i et vektorrom V er en basis av V hvis

- vektorene i S er lineært uavhengige, og
- vektorene i S utspenner V, $\mathrm{span}(S) = V$.

Basis

Basis for vektorrom: En endelig mengde $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ av vektorer i et vektorrom V er en basis av V hvis

- vektorene i S er lineært uavhengige, og
- vektorene i S utspenner V, $\mathrm{span}(S) = V$.

Da kan enhver vektor i V skrives *entydig* på formen

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n.$$

Basis for $\mathbf{R}^n$

Standardbasis i $\mathbf{R}^n$ er

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, ...0)$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, ...0)$$

$$\dots$$

$$\mathbf{e}_n = (0, 0, ...1)$$

Det finnes mange forskjellige basiser for $\mathbf{R}^n$.

Dimensjon

Teorem La $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ...\mathbf{v}_n\}$ være en basis for vektorrom V, hvis $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ...\mathbf{w}_m\}$ er en delmengde av V og $m > n$ så er vektorene i T lineart avhengige.

Dimensjon

Teorem La $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ...\mathbf{v}_n\}$ være en basis for vektorrom V, hvis $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, ...\mathbf{w}_m\}$ er en delmengde av V og $m > n$ så er vektorene i T lineart avhengige.

Teorem To basiser for et vektorrom V har like mange vektorer.

Dimensjon

Teorem La $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_n\}$ være en basis for vektorrom V, hvis $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots \mathbf{w}_m\}$ er en delmengde av V og $m > n$ så er vektorene i T lineart avhengige.

Teorem To basiser for et vektorrom V har like mange vektorer.

Antallet vektorer i en basis for V kalles dimensjonen til vektorrometet V.

Basis og dimensjon

Teorem La V være et n-dimensjonalt vektorrom.

- Hvis $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ...\mathbf{v}_n\}$ er en mengde med n lineært uavhengige vektorer i V, så er S en basis for V.

Basis og dimensjon

Teorem La V være et n-dimensjonalt vektorrom.

- Hvis $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ...\mathbf{v}_n\}$ er en mengde med n lineært uavhengige vektorer i V, så er S en basis for V.
- Hvis $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ...\mathbf{v}_n\}$ er en mengde med n vektorer som utspenner V, $\mathrm{span(S) = V}$, så er S en basis for V.

Basis og dimensjon

Teorem La V være et n-dimensjonalt vektorrom.

- Hvis $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ...\mathbf{v}_n\}$ er en mengde med n lineært uavhengige vektorer i V, så er S en basis for V.
- Hvis $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ...\mathbf{v}_n\}$ er en mengde med n vektorer som utspenner V, $\mathrm{span(S) = V}$, så er S en basis for V.
- Hvis S er lineært uavhendig, så finnes en basis for V som inneholder S

Basis og dimensjon

Teorem La V være et n-dimensjonalt vektorrom.

- Hvis $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ...\mathbf{v}_n\}$ er en mengde med n lineært uavhengige vektorer i V, så er S en basis for V.
- Hvis $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ...\mathbf{v}_n\}$ er en mengde med n vektorer som utspenner V, $\mathrm{span(S) = V}$, så er S en basis for V.
- Hvis S er lineært uavhendig, så finnes en basis for V som inneholder S
- Hvis S utspenner V s inneholder S en basis for V.