Radrommet og kolonnerommet til en matrise

NTNU, Institutt for matematiske fag

Oktober, 2009

Radrommet

La A være en $m \times n$ matrise, $A = [a_{ij}]$.

Radrommet til A $\mathrm{Row}(A)$ er underromet i $\mathbf{R}^n$ utspent av radvektorene til A. Hvis

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{r}_1 & = & (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}) \\ \mathbf{r}_2 & = & (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}) \\ ... & ... & ... \\ \mathbf{r}_m & = & (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn}) \end{array}$$

så er $\mathrm{Row}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_m)$.

Radrommet

La A være en $m \times n$ matrise, $A = [a_{ij}]$.

Radrommet til A $\mathrm{Row}(A)$ er underromet i $\mathbf{R}^n$ utspent av radvektorene til A. Hvis

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{r}_1 & = & (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ \mathbf{r}_2 & = & (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{r}_m & = & (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) \end{array}$$

så er $\mathrm{Row}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_m)$.

Dimensjonen til $\mathrm{Row}(A)$ kalles radrangen til A.

Basis for $\mathrm{Row}(A)$

Teorem To radekvivalente matriser har samme radrommet.

Basis for $\mathrm{Row}(A)$

Teorem To radekvivalente matriser har samme radrommet.

Teorem Hvis E er en echelonmatrise, så er ikkenullradene til E en basis for $\mathrm{Row}(E)$.

Basis for $\mathrm{Row}(A)$

Teorem To radekvivalente matriser har samme radrommet.

Teorem Hvis E er en echelonmatrise, så er ikkenullradene til E en basis for $\mathrm{Row}(E)$.

Ved Gausseliminasjon kan vi omforme A til en echelonmatrise E. Ikkenullradene i E danner en basis for $\mathrm{Row}(A)$. Radrangen til A er lik antallet av lederelementer i E.

Kolonnerommet

Kolonnerommet til A $\mathrm{Col}(A)$ er underrommet i $\mathbf{R}^m$ utspent av kolonnevektorene til A. Hvis

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

så er $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$.

Kolonnerommet

Kolonnerommet til A $\mathrm{Col}(A)$ er underromet i $\mathbf{R}^m$ utspent av kolonnevektorene til A. Hvis

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

så er $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$.

Inhomogene system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent (har en løsing) hvis og bare hvis høyresidevektoren $\mathbf{b}$ er i kolonnerommet til A.

Kolonnerommet

Kolonnerommet til A $\mathrm{Col}(A)$ er underrommet i $\mathbf{R}^m$ utspent av kolonnevektorene til A. Hvis

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

så er $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$.

Inhomogene system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent (har en løsing) hvis og bare hvis høyresidevektoren $\mathbf{b}$ er i kolonnerommet til A.

Kolonnene i A som svarer til ledende variabler i E er en basis for $\mathrm{Col}(A)$.

Kolonnerommet

Kolonnerommet til A $\mathrm{Col}(A)$ er underrometet i $\mathbf{R}^m$ utspent av kolonnevektorene til A. Hvis

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

så er $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$.

Inhomogene system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent (har en løsing) hvis og bare hvis høyresidevektoren $\mathbf{b}$ er i kolonnerommet til A.

Kolonnene i A som svarer til ledende variabler i E er en basis for $\mathrm{Col}(A)$.

$\dim(\mathrm{Col}(A)) = \dim(\mathrm{Row}(A)) = \mathrm{rank}(A)$

Nullrommet

$\mathrm{Null}(A)$ er løsningsrommet til det homogene systemet $A\mathbf{x} = 0$ som er ekvivalent med $E\mathbf{x} = 0$.

Hvis systemet har k frie variabler, blir generell løsning på formen

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \ldots + t_k\mathbf{v}_k,$$

og da er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ en basis for $\mathrm{Null}(A)$.

Nullrommet

$\mathrm{Null}(A)$ er løsningsrommet til det homogene systemet $A\mathbf{x} = 0$ som er ekvivalent med $E\mathbf{x} = 0$.

Hvis systemet har k frie variabler, blir generell løsning på formen

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \ldots + t_k\mathbf{v}_k,$$

og da er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ en basis for $\mathrm{Null}(A)$.

$$\mathrm{rank}(A) + \dim \mathrm{Null}(A) = n,$$

hvis A er en $m \times n$ matrise.