

Ortogonale vektorer og ortogonale komplement

NTNU, Institutt for matematiske fag

Oktober, 2009

Prikkproduktet i $\mathbf{R}^n$

Prikkproduktet (skalarproduktet) av to vektorer $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ og $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ i $\mathbf{R}^n$ er definert ved

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \mathbf{u}^T \mathbf{v}.$$

De følgende reglene er oppfylt:

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3. $c\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$; $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Lengden og avstanden

Lengden av en vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ i $\mathbf{R}^n$ er definert ved

$$|\mathbf{u}| = (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)^{1/2} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2}.$$

Cauchy-Schwarz' ulikhet $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$

Lengden og avstanden

Lengden av en vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ i $\mathbf{R}^n$ er definert ved

$$|\mathbf{u}| = (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)^{1/2} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2}.$$

Cauchy-Schwarz' ulikhet $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$

Vinkelen mellom to (ikkenull) vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbf{R}^n$ er definert som den entydige vinkelen θ i intervallet $[0, \pi]$ som oppfyller

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}.$$

Lengden og avstanden

Lengden av en vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ i $\mathbf{R}^n$ er definert ved

$$|\mathbf{u}| = (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)^{1/2} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2}.$$

Cauchy-Schwarz' ulikhet $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$

Vinkelen mellom to (ikkenull) vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbf{R}^n$ er definert som den entydige vinkelen θ i intervallet $[0, \pi]$ som oppfyller

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}.$$

Avstanden mellom to (punkter) vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbf{R}^n$ er definert ved $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$.

Trekantulikheten $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$

Ortogonale vektorer

Vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbf{R}^n$ er ortogonale hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Pythagoras' teorem For orthogonale vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ gjelder

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2.$$

Ortogonale vektorer

Vektorene $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ i $\mathbf{R}^n$ er ortogonale hvis $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Pythagoras' teorem For orthogonale vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ gjelder

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2.$$

Teorem Hvis ikkenull-vektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ er parvise ortogonale, så er de lineært uavhengige.

Ortogonal komplement

La V være et underrom i $\mathbf{R}^n$. En vektor $\mathbf{u}$ sies å være ortogonal til V hvis $\mathbf{u}$ er ortogonal til alle $\mathbf{v}$ i V , $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ for alle $\mathbf{v}$ i V .

Mengden av alle vektorer i $\mathbf{R}^n$ som er orthogonale til underrommet V kalles det ortogonale komplementet til V og betegnes $V^\perp$.

Ortogonal komplement

La V være et underrom i $\mathbf{R}^n$. En vektor $\mathbf{u}$ sies å være ortogonal til V hvis $\mathbf{u}$ er ortogonal til alle $\mathbf{v}$ i V , $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ for alle $\mathbf{v}$ i V .

Mengden av alle vektorer i $\mathbf{R}^n$ som er orthogonale til underrommet V kalles det ortogonale komplementet til V og betegnes $V^\perp$.

1. $V^\perp$ er et underrom i $\mathbf{R}^n$
2. V og $V^\perp$ har ingen felles elementer bortsett fra 0
3. $(V^\perp)^\perp = V$
4. $\dim V + \dim V^\perp = n$

Ortogonal komplement

La V være et underrom i $\mathbf{R}^n$. En vektor $\mathbf{u}$ sies å være ortogonal til V hvis $\mathbf{u}$ er ortogonal til alle $\mathbf{v}$ i V , $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ for alle $\mathbf{v}$ i V .

Mengden av alle vektorer i $\mathbf{R}^n$ som er orthogonale til underrommet V kalles det ortogonale komplementet til V og betegnes $V^\perp$.

1. $V^\perp$ er et underrom i $\mathbf{R}^n$
2. V og $V^\perp$ har ingen felles elementer bortsett fra 0
3. $(V^\perp)^\perp = V$
4. $\dim V + \dim V^\perp = n$

Teorem La A være en $m \times n$ -matrise. Hvis $V = \text{Row}(A)$, så er $V^\perp = \text{Null}(A)$.