

Minste kvadraters løsning

NTNU, Institutt for matematiske fag

Oktober, 2009

Inkonsistent ligningsystem

Anta at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er et inkonsistent ligningsystem, da er $\mathbf{b}$ ikke i $\text{Col}(A)$. Anta også at $\text{rank}(A) = n$, det betyr at kolonnene til A er lineært uavhengige. Vi har $m > n$ og antall ligninger er mer enn antall ukjente. Vi sier at systemet er overbestemte.

Inkonsistent ligningsystem

Anta at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er et inkonsistent ligningsystem, da er $\mathbf{b}$ ikke i $\text{Col}(A)$. Anta også at $\text{rank}(A) = n$, det betyr at kolonnene til A er lineært uavhengige. Vi har $m > n$ og antall ligninger er mer enn antall ukjente. Vi sier at systemet er overbestemte.

Minste kvadratersløsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er vektoren $\bar{\mathbf{x}}$ som gjør kvadratfeilen $E^2 = |A\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}|^2$ minst mulig.

Ortogonal projeksjon

La V være et underrom i $\mathbf{R}^n$. Enhver vektor $\mathbf{b}$ i $\mathbf{R}^n$ kan skrives entydig som $\mathbf{v} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$ der $\mathbf{p}$ er i V og $\mathbf{q}$ er i $V^\perp$.

Vektoren $\mathbf{p}$ kalles **den ortogonale projeksjonen** av $\mathbf{b}$ inn i V .

Ortogonal projeksjon

La V være et underrom i $\mathbf{R}^n$. Enhver vektor $\mathbf{b}$ i $\mathbf{R}^n$ kan skrives entydig som $\mathbf{v} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$ der $\mathbf{p}$ er i V og $\mathbf{q}$ er i $V^\perp$.

Vektoren $\mathbf{p}$ kalles **den ortogonale projeksjonen** av $\mathbf{b}$ inn i V .

Den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ inn i V er nærmere til $\mathbf{b}$ enn enhver andre vektor i V .

Hvis $\bar{\mathbf{x}}$ er minste kvadraters løsning til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ så er $A\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{p}$ den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ inn i V .

Hvordan finne vi minste kvadraters løsning?

For å finne minste kvadraters løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, løser vi det tilhørende normalsystemet

$$A^T A \bar{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}.$$

Hvordan finne vi minste kvadraters løsning?

For å finne minste kvadraters løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, løser vi det tilhørende normalsystemet

$$A^T A \bar{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}.$$

Hvis $m \times n$ matrisen A har $\text{rank}(A) = n$, så er $n \times n$ matrisen $A^T A$ inverterbar og normalsystemet har entydig løsning $\bar{\mathbf{x}}$.