Komplekse tall: polarform

NTNU, Institutt for matematiske fag

August 21, 2009

Komplekse tall på polarform

Ethvert komplekst tall $z = x + iy$ kan representeres ved et punkt i et *polarkoordinatsystem*

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}.$$

Vi har $r = |z|$ og

$$\theta = \arg z = \arctan(y/x) + k\pi$$

avhengig av z's kvadrant.

Operasjoner på polarform

Komplekskonjugerte på polarform

$$z = re^{i\theta}, \quad \bar{z} = re^{-i\theta}.$$

Multiplikasjon og divisjon på polarform

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2.$$

De Moivres formel

$$z^n = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Røtter

Ligningen $w^n = z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ har n løsninger

$$w_k = \sqrt[n]{r}(\cos(\theta + 2pk)/n + i\sin(\theta + 2pk)/n),$$

$k = 0, 1, , n - 1$
Punktene $w_0, w_1, , w_{n-1}$ ligger på en sirkel med radius $\sqrt[n]{r}$ og senter i origo, og utgjør hjørnene i en regulær n-kant.

Andregradsligning $z^2 + pz + q = 0$ med komplekse koeffisienter p og q har to (komplekse) løsninger

$$z_{1,2} = (-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})/2.$$

Kompleks eksponentialfunksjon

Notasjon:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Den er som vanlig eksponentialfunksjon:

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \dots$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5}\theta^5 - \dots$$

Så har vi:

$$\cos\theta + i\sin\theta = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots = e^{i\theta}$$

Kompleks eksponentialfunksjon

Definisjon:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Da er

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

Hvis $f(t) = e^{tz}$ så får vi

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt} e^{tz} = ze^{tz}.$$