Ortogonale basiser og Gram-Schmidts algoritme

NTNU, Institutt for matematiske fag

Oktober, 2009

Ortogonale basiser

En basis $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ for et underrom V i $\mathbf{R}^n$ kalles ortogonal hvis vektorene $\mathbf{v}_1, ...\mathbf{v}_k$ er parvis ortogonale, $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ når $i \neq j$.

Ortogonale basiser

En basis $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ for et underrom V i $\mathbf{R}^n$ kalles ortogonal hvis vektorene $\mathbf{v}_1, ...\mathbf{v}_k$ er parvis ortogonale, $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ når $i \neq j$.

Hvis, i telleg, vektorene $\mathbf{v}_1, ...\mathbf{v}_k$ er enhetsvektorer, $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = |\mathbf{v_i}|^2 = 1$, sies basisen å være en ortonormal.

Ortogonale basiser

En basis $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ for et underrom V i $\mathbf{R}^n$ kalles ortogonal hvis vektorene $\mathbf{v}_1, ...\mathbf{v}_k$ er parvis ortogonale, $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$ når $i \neq j$.

Hvis, i telleg, vektorene $\mathbf{v}_1, ...\mathbf{v}_k$ er enhetsvektorer, $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = |\mathbf{v_i}|^2 = 1$, sies basisen å være en ortonormal.

For eksempel er standardbasisen ortonormal.

Ortogonal projeksjon

La V være et underrom i $\mathbf{R}^n$ og $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ være en ortogonal basis for V. Den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{b}$ inn i V er gitt ved

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_1}}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v_2} \cdot \mathbf{v_2}}\mathbf{v}_2 + ... + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_k}{\mathbf{v_k} \cdot \mathbf{v_k}}\mathbf{v}_k.$$

Gram-Schmidts algoritme

Anta at $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$ er en basis for et underrom V i $\mathbf{R}^n$. Vi får en ortogonal basis $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k$ for V ved å bruke følgende algoritme:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1,$$
$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1$$
$$\cdots$$
$$\mathbf{u}_k = \mathbf{v}_k - \frac{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \cdots - \frac{\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{u}_{k-1}}{\mathbf{u}_{k-1} \cdot \mathbf{u}_{k-1}}\mathbf{u}_{k-1}$$