Lineære differensialligninger av orden 2

NTNU, Institutt for matematiske fag

August 25, 2009

Annenordens lineære differensialligninger

Standartform til en annenordens lineær differensialligning:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

Ligningen er homogen hvis $r(x) \equiv 0$ og inhomogen ellers.

Vi skal først studere homogene ligningner.

Fundamentalteoremet for homogene ligninger

Lineært prinsipp

Hvis y_1 og y_2 er løsninger av

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

så er også $c_1 y_1 + c_2 y_2$ løsning av (1), c_1, c_2 er konstanter.

$c_1 y_1 + c_2 y_2$ sies å være en lineær kombinasjon av y_1 og y_2

Lineært uavhengige funksjoner

To funksjoner y_1 og y_2 er lineært uavhengige på en intervall I hvis ligningen

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) = 0 \quad \text{for alle } x \text{ i } I$$

medfører $k_1 = 0$ og $k_2 = 0$.

To funksjoner som ikke er lineært uavhengige kalles lineært avhengige.

Med andre ord, y_1 og y_2 er lineært avhengige på I hvis $y_2 = 0$ på I eller y_1/y_2 er konstant på I

Basis og generell løsning

To lineært uavhengige løsninger y_1 og y_2 av en homogen ligning

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

sies å være en basis for løsningene av ligningen og

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

kalles en generell løsning.

Initialverdiproblem

Vi vil finne en løsning av

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

som oppfyller initialbetingelser

$$y(x_0) = K_0, \; y'(x_0) = K_1.$$

Hvis $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ er en generell løsning av ligningen, løser vi initialverdiproblemet ved å bestemme konstantene c_1 og c_2.

Reduksjon av orden

Kjenner vi én løsning y_1 av

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

kan vi finne en generell løsning ved å innføre $y = uy_1$. Vi får førsteordens differensiallligning i $U = u'$:

$$U' + \frac{2y_1' + py_1}{y_1} U = 0.$$

Da blir det

$$U(x) = y_1^{-2} e^{-\int p dx}$$

og

$$y_2 = y_1 \int U(x) dx.$$

Løsningene y_1 og y_2 er lineært uavhengige, generell løsning er $c_1 y_1 + c_2 y_2$.