Masse-fjærsystem; Euler-Cauchyligning

NTNU, Institutt for matematiske fag

September 1, 2009

Frie svinger

Udempet system:

$$my'' + ky = 0. \tag{1}$$

Generell løsning av (1) er

$$y(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C(\cos(\omega_0 t - \delta)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},\;\; C = \sqrt{A^2 + B^2}, \tan\delta = \frac{B}{A}$$

Harmoniske svinger med periode $T = 2\pi/\omega_0$, frekvens $\omega_0/2\pi$, amplitude C og fasevinkel δ.

Demping

Dempet system:

$$my'' + cy' + ky = 0$$

Karakteristisk ligning har røtter:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

	Røtter	Betingelse	Demping
I	$\lambda_1 \neq \lambda_2$ reelle	$c^2 > 4mk$	overkritisk
II	$\lambda_1 = \lambda_2$ dobbelrot	$c^2 = 4mk$	kritisk
III	$\lambda_{1,2}$ komplekse	$c^2 < 4mk$	underkritisk

Euler-Cauchyligning

Ligningen er

$$x^2y'' + axy' + by = 0 \tag{2}$$

der a og b er konstanter. Innsetting av $y = x^m$ gir hjelpeligningen

$$m^2 + (a-1)m + b = 0 \tag{3}$$

Hvis (3) har reele røtter $m_1 \neq m_2$ så er funksjonene

$$y_1 = x^{m_1} \quad \text{og} \quad y_2 = x^{m_2}$$

en basis for løsninger av (2), og en generell løsning av (2) i dette tilfellet er

$$y = c_1x^{m_1} + c_2x^{m_2}$$