Eksistens og entydighet av løsninger; Inhomogene ligninger

NTNU, Institutt for matematiske fag

September 4, 2009

Eksistens og entydighet av løsninger

Vi ser på en lineær diffirensialligning av orden 2,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

der $p(x)$ og $q(x)$ er kontinuelige på et intervall I.

Teorem 1 Initialverdiproblemet med (1) og initialbetingelser

$$y(x_0) = K_0 \quad y'(x_o) = K_1$$

der x_0 er et punkt i I har entydig (nøyaktig én) løsning.

Wronskideterminant

Wronskideterminatnen til to funksjoner y_1 og y_2 er definert ved

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

Teorem 2 La y_1 og y_2 være løsninger av (1) på I.
1. Hvis y_1 og y_2 er lineært uavhengige på I, så er $W(y_1, y_2) \neq 0$ for alle x i I.
2. Hvis y_1 og y_2 er lineært avhengige på I, så er $W(y_1, y_2) = 0$ for alle x i I.

Teorem 3 Hvis y_1 og y_2 er lineært uavhengige løsninger av (1) på I så vil generell løsning

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

omfatte alle løsninger av (1).

Inhomogene ligninger

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{2}$$

Den tilhørede homogene ligningen er

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{3}$$

- Differansen mellom to løsninger av (2) er en løsning av (3).
- Summen av en løsning av (2) og en løsning av (3) er en løsning av (2).

Generell løsning:
En generell løsning av (2) er en løsning av formen

$$y = y_h + y_p$$

der $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ er en generell løsning av (3), og y_p er **en** løsning av (2) (en partikulær løsning).