Forelesning, TMA4110 Torsdag 11/9

Martin Wanvik, IMF
Martin.Wanvik@math.ntnu.no

(K 2.8) Tvungne svingninger. Resonans.

- Ser på masse-fjær system påvirket av periodisk ytre kraft:

$$my'' + cy' + ky = F_0 \cos \omega t \qquad (1)$$

der $m, c, k, F_0, \omega > 0$.

- Løses på "vanlig" måte; generell løsning er summen av generell løsning av THL og en vilkårlig løsning y_p av (1).
- Vi kan finne y_p ved ubestemte koeffisienters metode (K, avsnitt 2.7). Vi finner (forrige forelesning(?))

$$y_p(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \qquad (2)$$

der

$$a = \frac{F_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2}, \qquad b = \frac{F_0 \omega c}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2},$$

$(\omega_0 := \sqrt{k/m})$.

Tilfelle 1: Udempet system ($c = 0$)

- Forenkler ting betraktelig; vi får $b = 0$, og y_p reduserer til

$$y_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t = \frac{F_0}{k[1 - (\omega/\omega_0)^2]} \cos \omega t$$

- Løsningene, y_h, av THL er på formen

$$y_h = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega t = C \cos(\omega t - \delta),$$

altså, svingninger med systemets naturlige frekvens, ω_0.

- Så generell løsning kan skrives

$$y(t) = C \cos(\omega_0 t - \delta) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

Resonans

- Maksimumsamplituden til y_p kan skrives

$$a_0 = \frac{F_0}{k}\rho, \text{ der } \rho = \frac{1}{1-(\omega/\omega_0)^2}$$

- Dersom $\omega \to \omega_0$ (frekvensen til den påtrykte kraften ω nærmer seg systemets naturlige frekvens ω_0), går $a_0 \to \infty$. Svingningene blir dermed ekstremt store. Dette fenomenet kalles resonans, og ρ kalles resonansfaktoren.

Resonans (forts.)

- For $\omega = \omega_0$ holder ikke lenger (2) (vi måtte anta $\omega_0 \neq \omega$ i utledningen).
- Ligningen er på formen:

$$y'' + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t \tag{3}$$

Siden $\sin \omega_0 t$, $\cos \omega_0 t$ er løsninger av THL, sier modifikasjonsregelen at vi må multiplisere med t, så vi prøver

$$y_p = t(a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t)$$

- Det gir

$$y_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t$$

Resonans (forts.)

- Vi ser at maksumumsamplituden (til y_p) $F_0 t/2m\omega_0 \to \infty$ når $t \to \infty$.
- I praksis vil systemer med svært lite demping kunne gjennomgå store nok vibrasjoner til å ødelegge systemet (dersom $\omega \approx \omega_0$).

For hvilken verdi av k i ligningen

$$2y'' + ky = 0.6 \cos 0.6t$$

får vi resonans?

Tilfelle 2: Dempede tvungne svingninger

- Dersom $c > 0$, vil $y_h \to 0$ når $t \to +\infty$.
- Dette betyr at den transiente (forbigående) løsningen $y = y_h + y_p$ går mot den stasjonære løsningen y_p.
- Med andre ord, etter tilstrekkelig lang tid vil systemet svinge (harmonisk bevegelse) med frekvensen til den ytre kraften.

Eksempel (K, oppg. 2.8.10)

$$y'' + 4y + 4y = \cos 4t$$

“Praktisk” resonans

- I det dempede tilfellet vil alltid amplituden være endelig.
- Men, den kan godt ha et maksimum ved ω, avhengig av dempingskonstanten c.
- Dette kan kalles “praktisk” resonans; dersom c ikke er altfor stor, kan enkelte frekvenser ω for den ytre kraften eksitere store nok svingninger til å skade eller ødelegge systemet.
- Det er åpenbart nyttig å vite frekvensen $\omega_{\max}$ og den tilhørende amplituden $C^*(\omega_{\max})$.

"Praktisk" resonans (forts.)

- Vi kjenner funksjonen $C^*(\omega)$, og kan dermed bruke litt enkel teori fra Matematikk 1 for å bestemme maksimum (derivere, løse $(C^*)'(\omega) = 0$ osv.
- Det viser seg at dersom $c^2 < 2mk$, så eksisterer et maksimum $\omega_{\max}$, der
$$\omega_{\max}^2 = \omega_0^2 - \frac{c^2}{2m^2}$$
og vi har
$$C^*(\omega_{\max}) = \frac{2mF_0}{c\sqrt{4m^2\omega_0^2 - c^2}}$$

(K. 2.10) Variasjon av parametere

- Vi er (fortsatt) interessert i å løse ligninger på formen:
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{4}$$
- Fra avsnitt 2.7 vet vi at dersom y_p er en (fiksèrt) løsning av (4), så er alle løsninger av (4) på formen $y = y_h + y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$, der y_h er en løsning av den tilhørende homogene ligningen
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{5}$$
- "Variasjon av parametere" er en generell metode for å finne en slik y_p. Vi husker (forhåpentligvis) fra avsnitt 2.7 at dersom ligningen har konstante koeffisienter, og $r(x)$ har en relativt enkel form (potensfunksjoner, eksponensialfunksjoner, sin, cos, og summer av disse), så kan vi bruke "ubestemte koeffisienters metode".

- Hva hvis høyresiden er "komplisert", eller ligningen ikke har konstante koeffisienter? (f.eks en ikke-homogen Euler-Cauchy ligning)? Eller hvis man rett og slett har glemt ubestemte koeffisienters metode? Jo, vi bruker variasjon av parametere.
- Anta at y_1 og y_2 er en basis av løsninger av (5). La

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W}\,\mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 r}{W}\,\mathrm{d}x, \tag{6}$$

der $W = W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$ er Wronskideterminanten, og $r = r(x)$ er høyresiden til (4). Da er $y_p(x)$ en (partikulær)løsning av (4).

Variasjon av parametere (forts.)

- Merk: Det er meget viktig at ligningen er på standardform

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

  Dersom den er på formen

$$f(x)y'' + g(x)y' + h(x)y = k(x)$$

  divider med $f(x)$; riktig verdi for r i (6) er dermed $r(x) = k(x)/f(x)$ (og ikke $r(x) = k(x)$).

Eksempel: Oppgave 3, Eksamen TMA4115 4. Juni 2009

Finn generell løsning til

$$x^2 y'' - 2y = 16x^3 \ln x, \quad x > 0$$

Hint: Det kan antas som kjent at

$$\int x^n \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$$