Lineære ligningssystem og matriser

E.Malinnikova, NTNU, Institutt for matematiske fag

September 15, 2009

Lineære ligningssystem

Vi har et ligningssystem av m ligninger med n ukjente $x_1, ..., x_n$ som kan skrives:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ .... & & ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Vi vil finne alle løsninger $(x_1, ..., x_n)$.
Ligningssystemet sies vre konsistent hvis det har minst én løsning og inkonsistent hvis det ikke har noen løsninger.

Eksempler

Eksempel 1. Vi vil løse systemet:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Eksempler

Eksempel 1. Vi vil løse systemet:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 & = & 5 \quad {\color{red}\times 2} \\ 3x_1 + 2x_2 & = & 4 \end{array} \quad {\color{red}+}$$

Det er ekvivalent med systemet

Eksempler

Eksempel 1. Vi vil løse systemet:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 5 \quad \times 2 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 4 \quad + \end{aligned}$$

Det er ekvivalent med systemet

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 5 \\ 7x_1 \quad &= 14 \end{aligned}$$

Eksempler

Eksempel 1. Vi vil løse systemet:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 & = & 5 \\ 3x_1 + 2x_2 & = & 4 \end{array} \quad {\color{red}+} \quad {\color{red}\times 2}$$

Det er ekvivalent med systemet

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 & = & 5 \\ 7x_1 & = & 14 \end{array}$$

Fra den nederste ligningen har vi $x_1 = 2$.

Eksempler

Eksempel 1. Vi vil løse systemet:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 & = & 5 \\ 3x_1 + 2x_2 & = & 4 \end{array} \quad {\color{red}+} \quad {\color{red}\times 2}$$

Det er ekvivalent med systemet

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 & = & 5 \\ 7x_1 & = & 14 \end{array}$$

Fra den nederste ligningen har vi $x_1 = 2$.
Så gir den første ligningen $x_2 = 2x_1 - 5 = 4 - 5 = -1$.

Eksempler

Eksempel 1. Vi vil løse systemet:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 5 \quad {\color{red}\times 2} \\ 3x_1 + 2x_2 &= 4 \quad {\color{red}+} \end{aligned}$$

Det er ekvivalent med systemet

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 5 \\ 7x_1 &= 14 \end{aligned}$$

Fra den nederste ligningen har vi $x_1 = 2$.
Så gir den første ligningen $x_2 = 2x_1 - 5 = 4 - 5 = -1$.

Svar: $x_1 = 2,\ x_2 = -1$.

Eksempler

Eksempel 2.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Eksempler

Eksempel 2.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Eksempel 3.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 5 \\ -4x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Matriser

Koeffisientmatrisen til ligningssystemet og høyresidevektoren er

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Totalmatrisen til ligningssystemet er

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Gauss og GaussJordan- eliminasjon

Vi løser ligningssystemet ved å omforme totalmatrisen til en "enkel" matrise ved hjelp av radoperasjoner.

Gauss og GaussJordan- eliminasjon

Vi løser ligningssystemet ved å omforme totalmatrisen til en "enkel" matrise ved hjelp av radoperasjoner.

Løsninger til ligningssystemet blir ikke forandret ved radoperasjoner!

Gauss og GaussJordan- eliminasjon

Vi løser ligningssystemet ved å omforme totalmatrisen til en "enkel" matrise ved hjelp av radoperasjoner.

Løsninger til ligningssystemet blir ikke forandret ved radoperasjoner!

- Hva er radoperasjoner?

Gauss og GaussJordan- eliminasjon

Vi løser ligningssystemet ved å omforme totalmatrisen til en "enkel" matrise ved hjelp av radoperasjoner.

Løsninger til ligningssystemet blir ikke forandret ved radoperasjoner!

- Hva er radoperasjoner?
- Hva mener vi med en "enkel" matrise?

Elementære radoperasjoner i en matrise

1. Multiplisere en rad med konstant $c \neq 0$ (cR_j)

Elementære radoperasjoner i en matrise

1. Multiplisere en rad med konstant $c \neq 0$ (cR_j)
2. Bytte om to rader ($\mathrm{SWAP}(R_j, R_k)$ / $R_j \leftrightarrow R_k$)

Elementære radoperasjoner i en matrise

1. Multiplisere en rad med konstant $c \neq 0$ (cR_j)
2. Bytte om to rader ($\mathrm{SWAP}(R_j, R_k)$ / $R_j \leftrightarrow R_k$)
3. Addere et multiplum av en rad til en annen rad ($cR_j + R_k$)

Elementære radoperasjoner i en matrise

1. Multiplisere en rad med konstant $c \neq 0$ (cR_j)
2. Bytte om to rader ($\text{SWAP}(R_j, R_k)$ / $R_j \leftrightarrow R_k$)
3. Addere et multiplum av en rad til en annen rad ($cR_j + R_k$)

Radekvivalente matriser

To matriser kalles radekvivalente hvis en kan omformes til andre ved hjelp av elementære radoperasjoner.

Elementære radoperasjoner i en matrise

1. Multiplisere en rad med konstant $c \neq 0$ (cR_j)
2. Bytte om to rader ($\text{SWAP}(R_j, R_k)$ / $R_j \leftrightarrow R_k$)
3. Addere et multiplum av en rad til en annen rad ($cR_j + R_k$)

Radekvivalente matriser

To matriser kalles radekvivalente hvis en kan omformes til andre ved hjelp av elementære radoperasjoner.

Teorem Dersom to ligningssystem har radekvivalente totalmatriser, så har ligningssystemene samme løsninger.

Echelonmatrise

Første element i en rad som ikke er null kalles ledereelementet.

Echelonmatrise

Første element i en rad som ikke er null kalles lederelementet.

En matrise kalles echelonmatrise hvis

1. Eventuelle nullrader står nederst.
2. Lederelementet i hver ikkenullrad står til høyre for lederelementer i raden over.

Echelonmatrise

Første element i en rad som ikke er null kalles lederelementet.

En matrise kalles echelonmatrise hvis

1. Eventuelle nullrader står nederst.
2. Lederelementet i hver ikkenullrad står til høyre for lederelementer i raden over.

Anta at totalmtrisen til et ligningssystem er en echelonmatrise. Hver kolonne untatt den siste tilsvarer til en ukjent.

Echelonmatrise

Første element i en rad som ikke er null kalles ledderelementet.

En matrise kalles echelonmatrise hvis

1. Eventuelle nullrader står nederst.
2. Lederelementet i hver ikkenullrad står til høyre for lederelementer i raden over.

Anta at totalmtrisen til et ligningssystem er en echelonmatrise.
Hver kolonne untatt den siste tilsvarer til en ukjent.
En ukjent som tilsvarer til en kolonne med et lederelement kalles en ledende variabel. Andre ukjente kalles frie variabler.

Gausseliminasjon for ligningssystem

Gausseliminasjon:

1. Omforme totalmatrisen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

   til en echelonmatrise ved hjelp av elementære radoperasjoner.
2. Hvis echelonmatrisen inneholder en rad

$$0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | b$$

   med $b \neq 0$ så har systemet ingen løsning.
3. Ellers kan vi løse systemet med tilbakesubstitusjon.