Forelesning, TMA4110 Torsdag 17/9

Martin Wanvik, IMF
Martin.Wanvik@math.ntnu.no

Lineære ligningssystemer

- Generell form; m ligninger i n ukjente, $m \times n$-system:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

  der a_{ij}, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ og b_k, $1 \leq k \leq m$ er konstanter (reelle tall).
- Eksempel:

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 5 \\ 2x + 5y + \pi z + e^{\pi} w &= 17 \\ z + w &= 15 \end{aligned}$$

Lineære ligningssystemer (forts.)

- Ikke-eksempel:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5xy &= 2 \\ 5xe^{x} + 4y\sin(x)\cos(y) &= 5 \end{aligned}$$

- Naturlige spørsmål:
  1. Har systemet løsning?
  2. Er løsningen, hvis den eksisterer, entydig? (Eller, finnes det flere?)
  3. Hva er løsningen(e)?

Eksempler

- Det viser seg at det ikke er altfor mye som kan skje. La oss se på noen enkle eksempler for å illustrere de ulike mulighetene:
- 2×2-system. Løs for x og y:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ 2x + y &= 1 \end{aligned}$$

- Tilsvarende:

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= 4 \\ 3x + 9y &= 11 \end{aligned}$$

- 2×3-system:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

2×2-systemer

- Betrakt et vilkårlig 2×2-system

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'$$

Hver rad beskriver en linje i planet, og enhver løsning (x, y) av systemet må ligge på begge linjer. Det er tre (geometrisk opplagte) muligheter:

1. Linjene er sammenfallende; uendelig mange løsninger.
2. Linjene er ikke sammenfallende, men parallelle. Systemet har ingen løsning.
3. Linjene er ikke sammenfallende, og heller ikke parallelle. De skjærer hverandre i et enkelt punkt, og systemet har dermed en entydig løsning.

$m \times n$-systemer

- For et generelt $m \times n$-system er ikke ting like enkelt; geometrisk beskrives m $n-1$-dimensjonale "plan" i et n-dimensjonalt rom, og løsningene er punkter som ligger i alle disse planene.
- Likevel har vi også i denne situasjonen kun de samme tre mulighetene som for 2×2-systemer, nemlig
  1. Systemet har en entydig løsning.
  2. Systemet har ingen løsning.
  3. Systemet har uendelig mange løsninger.
- Men merk at det siste alternativet kan inntreffe på flere måter: i det tredje eksempelet dannet løsningene en linje, men dersom planene hadde sammenfallt, ville løsningene dannet et (2-dimensjonalt) plan. Med andre ord, antall "frie" parametere kan variere (mer om dette senere).

$m \times n$-systemer (forts.)

Definisjon

Vi sier at at $m \times n$-system er konsistent dersom det har minst èn løsning. Dersom det ikke har noen løsninger, sies systemet å være inkonsistent.

Eliminasjon (generell løsningsmetode)

- Eksempel:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ 3x + 3y + 4z &= 5 \\ 2x + y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

- Vi omformer systemet til

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ -y + z &= -2 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

ved å

1. Multiplisere en ligning med en konstant $\neq 0$.
2. Bytte om to ligninger.
3. Addère et konstant multippel av en ligning til en annen.

Tilbakesubstitusjon

- Vi kjenner nå verdien av z, nemlig -1. Vi kan nå tilbakesubstituere $z = -1$ for å finne verdien av de andre variablene, som gir (den entydige) løsningen $x = 2$, $y = 1$ og $z = -1$.

Matriser og Gausseliminasjon

- Metoden vi har brukt tidligere kan brukes til å løse alle slags lineære system.
- Men, spesielt dersom antall ligninger og antall ukjente er store, er den tungvint å bruke notasjonsmessig. Vi skal nå innføre notasjon som er enklere å håndtere, nemlig matriser, i tillegg til en tilsvarende løsningsmetode for systemer som kalles Gausseliminasjon (etter Carl Friedrich Gauss, 1777-1855, tysk matematiker).

Matriser

Definisjon

En rektangulær tabell

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

med $c_{ij} \in \mathbb{R}$ (vi kan også tillate komplekse koeffisienter), kalles en matrise. Størrelsen er $m \times n$ (vi skriver ofte $m \times n$-matrise), der m betegner antall rader og n betegner antall kolonner.

- Vi bruker ofte subskript for å betegne elementer i en matrise; a_{ij} betegner elementet i rad i og kolonne j.

Matriser og lineære ligningssystemer

Definisjon

La

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

være et lineært ligningssystem. Den tilhørende koeffisientmatrisen $A = [a_{ij}]$ er gitt ved

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriser og lineære ligningssystemer (forts.)

Definisjon

La

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

(dette kalles en kolonnevektor). Dersom vi legger til $\mathbf{b}$ *i koeffisientmatrisen, får vi den utvidede koeffisientmatrisen,* $[A \,|\, \mathbf{b}]$*, gitt ved*

$$[A \,|\, \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Gausseliminasjon; elementære radoperasjoner

Definisjon

En elementær radoperasjon på en matrise A *er en av følgende:*

1. *Multipliser en rad med en konstant* $c \neq 0$*. Notasjon:* cR_p *betyr "multipliser rad nummer* p *med* c*".*
2. *Bytt om to rader. Notasjon:* $\mathrm{SWAP}(R_p, R_q)$ *eller* $R_p \leftrightarrow R_q$ *betyr "bytt om rad* p *og rad* q*".*
3. *Addèr et konstant multippel av en rad til en annen. Notasjon:* $cR_p + R_q$ *betyr "adder* c *ganger rad* p *til rad* q*".*

Eksempel

Løs systemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 8x_2 + 7x_3 &= 20 \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 23 \end{aligned}$$

Radekvivalente matriser

Definisjon

To matriser sies å være radekvivalente dersom den ene kan omformes til den andre ved hjelp av en (endelig) sekvens av elementære radoperasjoner.

Teorem

Dersom de utvidede koeffisientmatrisene til to lineære ligningssystemer er radekvivalente, så har de samme løsningsmengde.

Echelonmatriser

- Hensikten med elementære radoperasjoner er alltid å bringe systemet over på en form som gjør at løsningen enkelt kan finnes ved tilbakesubstitusjon.

Definisjon

En matrise E sies å være en echelonmatrise dersom den har følgende to egenskaper:

1. *Enhver rad som kun består av nuller befinner seg under enhver rad som har et element $\neq 0$.*
2. *For enhver rad som inneholder et element $\neq 0$, så ligger første element $\neq 0$ strengt til høyre for det første elementet $\neq 0$ i raden over (hvis det eksisterer en rad over).*

- Det første elementet $\neq 0$ (fra venstre) i en rad kalles radens ledende element.

Gausseliminasjon

- Gitt et lineært ligningssystem, la $[A\,|\,\mathbf{b}]$ være systemets utvidede koeffisientmatrise. Bruk elementære radoperasjoner for å bringe $[A\,|\,\mathbf{b}]$ over på echelonform/trappeform $[E\,|\,\mathbf{b}']$.
- Dersom $[E\,|\,\mathbf{b}']$ inneholder en rad på formen

$$0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \,\big|\, b$$

  med $b \neq 0$, har systemet ingen løsning.
- Hvis ikke, finn løsning ved tilbakesubstitusjon.

Tilbakesubstitusjon

- Betrakt et ligningssystem på echelonform (altså, dets utvidede koeffisientmatrise er en echelonmatrise).
- Variabeler som svarer til kolonner med et ledende element, kalles ledende variabeler. De andre variabelene kalles frie variabeler.Tilbakesubstitusjon gjøres på følgende måte:
  1. Sett alle frie variabeler lik en vilkårlig parameter (altså, forskjellige parametere for hver enkelt frie variabel).
  2. Løs den siste $\neq 0$ ligningen for dens ledende variabel.
  3. Sett resultatet inn i nest siste ligning $\neq 0$, løs for den ledende variabel. Fortsett oppover til alle variabeler er bestemt.

Eksempel

Finn løsning på systemet

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 10 \\ x_3 + 2x_5 &= -3 \\ x_4 - 4x_5 &= 7 \end{aligned}$$