# Forelesning, TMA4110 Fredag 18/9

Martin Wanvik, IMF
Martin.Wanvik@math.ntnu.no



## Gauss-Jordan eliminasjon; redusert echelonform

- En matrise vil normalt være radekvivalent med flere echelonmatriser; med andre ord, echelonformen til en matrise er ikke entydig.
- Vi kan alltid forenkle en echelonmatrise ytterligere:
  1. Divider hver rad med verdien av dets ledende element. (Dette resulterer i at de ledende elementene har verdi 1).
  2. Adder passende multipler av hver rad til radene over, for å "nulle ut" de resterende elementene i kolonnene som svarer til ledende variabler.
- Matrisen vil nå være på redusert echelon form, og vi har utført Gauss-Jordan eliminasjon. Den reduserte echelonformen til et ligningssystem/matrise er entydig.
- For å forstå lineære ligningssystemer, er det dermed tilstrekkelig å studere de mulige reduserte echelonmatrisene.



## Reduserte echelonmatriser

**Definisjon**

*En echelonmatrise $E$ sies å være en redusert echelonmatrise dersom den har følgende egenskaper:*

1. *Ethvert ledende element har verdien 1.*
2. *Et ledende element er det eneste elementet $\neq 0$ i sin kolonne.*



## Reduserte echelonmatriser (forts.)

- Beregningsmessig har ikke Gauss-Jordan eliminasjon noen viktige fordeler.
- Fordelene er hovedsaklig teoretiske; la

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

være et lineært ligningssystem, og anta at systemet har $r$ ledende variabler, og at disse er $x_1, x_2, \dots, x_r$ (hvis ikke, bytt rekkefølge på variabelene). Da er $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ frie variable.

## Reduserte echelonmatriser (forts.)

- Systemets reduserte echelonform kan nå skrives

$$\begin{array}{ccccccc} x_{1j} & & & + \sum_{i=r+1}^{n} c_{1i}x_i & = & d_1 & \\ & x_{2j} & & + \sum_{i=r+1}^{n} c_{2i}x_i & = & d_2 & \\ & & \ddots & & \vdots & & \\ & & x_{jr} & + \sum_{i=r+1}^{n} c_{ri}x_i & = & d_r & (1) \\ & & & 0 & = & d_{r+1} & \\ & & & & \vdots & & \\ & & & 0 & = & d_m & \end{array}$$

  for konstanter $c_{ij}, r+1 \leq i, j \leq n$ og $d_k, 1 \leq k \leq m$.



## Implikasjoner

- Dersom minst èn av $d_{r+1}, d_{r+2}, \ldots, d_m$ er forskjellig fra 0, har systemet ingen løsning (det er inkonsistent).
- Hvis $d_{r+1} = d_{r+2} = \ldots = d_m = 0$, har systemet minst èn løsning (systemet er konsistent), og har en entydig løsning dersom $r = n$ og uendelig mange dersom $r < n$; antall frie parametere i løsningen er $n - r$.
- Vi har nå vist resultatet fra tidligere:

**Teorem**

*Et lineært ligningssystem har enten en entydig løsning, ingen løsning, eller uendelig mange løsninger.*



## Homogene systemer

- Et lineært system

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

  sies å være homogent dersom $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$.
- Et slikt system har alltid minst èn løsning, nemlig den trivielle løsningen $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Så dersom det har en ikke-triviell løsning, har det uendelig mange løsninger.
- Dersom antall ukjente $n$ er større enn antall ligninger $m$, $m < n$, er vi garantert en ikke-triviell løsning. For å se dette, betrakt den reduserte echelonformen (1). Antall ledende variable $r$ er høyst $m$, men siden $m < n$, så er $r < n$. Altså finnes minst en fri variabel, og systemet har en ikke-triviell løsning.



## Homogene systemer, identitetsmatrisen

- Et inhomogent (ikke-homogent) system kan derimot være inkonsistent. Men dersom det er konsistent, og har flere ukjente enn ligninger, har vi fortsatt minst èn fri variabel, og dermed uendelig mange løsninger.
- La oss nå begrense oss til systemer med like mange ligninger som ukjente, altså $n \times n$-systemer. En koeffisientmatrise $[a_{ij}]$ med samme antall rader som kolonner kalles kvadratisk.
- Dersom et homogent $n \times n$-system har bare den trivielle løsningen (ingen frie variable), ser den reduserte echelonformen slik ut

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

## Homogene systemer, identitetsmatrisen (forts.)

- Denne matrisen kalles identitetsmatrisen (det er en av størrelse $n \times n$ for hver $n$), og består av 1-tall langs diagonalen og 0'er ellers.

**Teorem**

*La $A$ være en $n \times n$-matrise. Da har det homogene ligningssystemet med koeffisientmatrise $A$ en entydig løsning (altså bare den trivielle løsningen) hvis og bare hvis $A$ er radekvivalent med identitetsmatrisen.*



## Matriseoperasjoner

**Definisjon (Likhet av matriser)**

*To matriser $A = [a_{ij}]$ og $B = [b_{ij}]$ sies å være like dersom de har samme størrelse og $a_{ij} = b_{ij}$ for alle $i$ og $j$.*

**Definisjon (Addisjon av matriser)**

*La $A = [a_{ij}]$ og $B = [b_{ij}]$ $m \times n$-matriser. Vi definerer summen av $A$ og $B$, $A + B$, til å være matrisen $C = [c_{ij}]$ der $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ for $1 \leq i \leq m$ og $1 \leq j \leq n$. (Med andre ord, vi adderer matriser elementvis.)*

**Definisjon (Skalar multiplikasjon)**

*La $A = [a_{ij}]$ være en matrise og $c \in \mathbb{R}$ et tall. Vi definerer skalar multiplikasjon av $A$ med $c$, $cA$, til å være matrisen $[c_{ij}]$ der $c_{ij} = ca_{ij}$ (igjen, dette er simpelthen elementvis skalar multiplikasjon med $c$). Vi skriver $-A = (-1)A$ og $A - B = A + (-B)$.*



## Vektorer

En kolonnevektor (eller simpelthen, en vektor) er en $n \times 1$-matrise (med andre ord, en enkelt kolonne) f.eks

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi bruker også notasjonen $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ for kolonnevektoren

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Denne må ikke forveksles med radvektoren

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}$$

Dette er to helt forskjellige ting (jfr. definisjonen av likhet for matriser); de er ikke matriser av samme størrelse, og betraktes således ikke som like.



## Vektorer (forts.)

- En løsning av et $m \times n$-system kan sees på som en vektor, nemlig

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

## Matrisemultiplikasjon

Hensikten er å forenkle notasjon for lineære system. La oss først betrakte en enkelt ligning:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{2}$$

Skriv

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Dersom vi definerer $\mathbf{ax}$ til å være summen av produkter av elementene i $\mathbf{a}$ og $\mathbf{x}$, så kan vi uttrykke (2) konsist som $\mathbf{ax} = b$.Det vil si

$$\mathbf{ax} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$



## Matrisemultiplikasjon

**Definisjon**

*Anta at $A$ er en $m \times p$-matrise med rader $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}$ og at $B$ er en $p \times n$-matrise med kolonner $\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n}$. Vi definerer produktet $AB$, en $m \times n$-matrise, som følger: $AB = [c_{ij}]$ der $c_{ij} = \mathbf{a_i b_j}$.*

- Merk at ikke alle matriser kan multipliseres. Vi kan definere $AB$ kun dersom antall kolonner i $A$ er lik antall rader i $B$. Vi ser at produktet har samme antall rader som $A$ og samme antall kolonner som $B$. En grei huskeregel er følgende "beregning": $(m \times p) \cdot (p \times n) = m \times n$ ($p$'ene "kansellerer").



## Matrisemultiplikasjon (forts.)

La $A$ være en $m \times p$-matrise, la $B$ være en $p \times n$-matrise og la $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ være en $p$-vektor. Vi skriver

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_1} & \mathbf{a_2} & \ldots & \mathbf{a_p} \end{bmatrix}$$

for å betegne at $A$ har kolonner gitt ved $m$-vektorene $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_p}$.Vi har da

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + \ldots + x_p\mathbf{a_p}$$

og dersom

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \ldots & \mathbf{b_n}, \end{bmatrix}$$

så er

$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{b_1} & A\mathbf{b_2} & \ldots & A\mathbf{b_n}. \end{bmatrix}$$



## Matrisemultiplikasjon (forts.)

- Et vilkårlig lineært $m \times n$-ligningssystem med koeffisientmatrise $A = [a_{ij}]$ og høyreside $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, kan nå uttrykkes $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, det vil si

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

## Matrisealgebra

### Teorem

*La $A$, $B$ og $C$ være matriser, av passende størrelser slik at operasjonene under gir mening. Da holder følgende:*

- *Kommutativ lov for addisjon:* $A + B = B + A$.
- *Assosiativ lov for addisjon:* $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- *Assosiativ lov for multiplikasjon:* $A(BC) = (AB)C$.
- *Distributive lover:* $A(B + C) = AB + BC$ *og* $(A + B)C = AC + BC$.



## Matriser oppfører seg ikke helt ulikt tall, men ...

- Det finnes ingen kommutativ lov for matrisemultiplikasjon. Et enkelt moteksempel er følgende

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- For reelle tall har vi $ad = 0$ impliserer at $a = 0$ eller $d = 0$. Dette er svært nyttig når vi skal løse ligninger. Eksemplet over viser derimot at produktet av to matriser $\neq 0$ utmerket godt kan være 0.
- Matriser har ikke kansellering; for reelle tall har vi at $ab = ac$ impliserer at $b = c$. For matriser? Nei, følger faktisk også av eksemplet over.



## Spesielle matriser

- En nullmatrise er en matrise hvor alle elementene er 0. Denne oppfører seg som tallet 0, og vi bruker derfor notasjonen 0 for en nullmatrise (uansett størrelse). Vi har

$$0 + A = A, \qquad 0A = A0 = 0$$

  for nullmatriser av passende størrelse.
- Identitetsmatrisen oppfører seg på samme måte som det reelle tallet 1. Vi betegner som oftest identitetsmatrisen (uansett størrelse) med $I$, og vi har

$$IA = AI = A$$



## Inverse matriser

Vi begrenser oss nå til kvadratiske ($n \times n$) matriser.

### Definisjon

*En (kvadratisk) matrise $A$ sies å være inverterbar dersom det eksisterer en annen (kvadratisk) matrise $B$ slik at*

$$AB = BA = I$$

*der $I$ er $n \times n$-identitetsmatrisen.*

### Teorem

*Dersom $A$ er inverterbar, så eksisterer det nøyaktig èn matrise $B$ slik at $AB = BA = I$. $B$ kalles den inverse matrisen til $A$, og betegnes $A^{-1}$.*

## $2 \times 2$-matriser.

**Teorem**

*Anta at*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

*Da er A inverterbar hvis og bare hvis $ad - bc \neq 0$, og den er gitt ved*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$



## Inverse matriser (forts.)

La $A$ være en kvadratisk matrise, og la $n \geq 0$ være et (positivt) heltall. Definer $A^n$ ved

$$A^n := \begin{cases} I & \text{hvis } n = 0 \\ A \cdot A \cdots A (n \text{ ganger}) & \text{hvis } n > 0 \end{cases}$$

Dersom $A$ er inverterbar, kan vi også definere negative (heltallige) potenser ved $A^{-n} = (A^{-1})^n$. Det kan vises at følgende holder: $A^r A^s = A^{r+s}$ og $(A^r)^s = A^{rs}$ for $r, s$ heltall.

**Teorem**

*Dersom A og B har samme størrelse, og er inverterbare, har vi*

1. $A^{-1}$ *er inverterbar og* $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. *Dersom* $n \geq 0$ *er et ikke-negativt heltall, er* $A^n$ *inverterbar og* $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^{-1}$.
3. *Produktet AB er inverterbart og* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.



## Inverse matriser og ligningssystemer

**Teorem**

*La A være en inverterbar $n \times n$-matrise, og la $\mathbf{b}$ være en n-vektor. Da har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en entydig løsning, gitt ved $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.*



## Gitt $A$ $(n \times n)$, hvordan finne $A^{-1}$?

**Definisjon**

*Matrisen E $(n \times n)$ sies å være en elementær matrise hvis den kan oppnås ved å utføre en enkelt elementær radoperasjon på $(n \times n)$ identitetsmatrisen I.*

Ved hjelp av dette kan vi uttrykke elementære radoperasjoner på $A$ ved matrisemultiplikasjon:

**Teorem**

*Dersom en elementær radoperasjon utføres på en $m \times n$-matrise A, da er resultatet EA der E er den elementære matrisen som oppnås ved å utføre tilsvarende radoperasjon på identitetsmatrisen I (størrelse $m \times m$).*

## Elementære matriser og inverterbarhet

- De elementære matrisene er inverterbare.

**Teorem**

*En $n \times n$-matrise $A$ er inverterbar hvis og bare hvis den er radekvivalent med identitetsmatrisen av størrelse $n \times n$.*

- Beviset gir oss en praktisk metode for å finne $A^{-1}$. Dersom $A$ er inverterbar, er den radekvivalent med $I$, slik at det finnes elementære matriser $E_1, E_2, \ldots, E_k$ slik at

$$E_k E_{k-1} \cdots E_1 A = I$$

  Dermed er $A = (E_1)^{-1}(E_2)^{-1} \cdots (E_k)^{-1}$ (et produkt av inverterbare matriser), og $A^{-1} = E_k E_{k-1} \cdots E_1 I$
- Dermed vil samme sekvens av elementære radoperasjoner som omformer $A$ til $I$ omforme $I$ til $A^{-1}$.



## Hvordan regne ut $A^{-1}$?

- For å ta et konkret eksempel, la

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- Skriv opp en ny matrise på formen $[A \,|\, I]$, der $I$ er identitetsmatrisen. Det vil si

$$[A \,|\, I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$



## Hvordan regne ut $A^{-1}$?

- Utfør så elementære radoperasjoner på hele $[A \,|\, I]$, til man står igjen med identitetsmatrisen på høyresiden, det vil si

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 1 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 1 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{array}\right]$$

  Det som da står i kolonnene til høyre for skillelinjen er $A^{-1}$, det vil si $[c_{ij}]$ (vi har utført samme radoperasjoner på identitetsmatrisen som vi utfører på $A$ for å omforme den til identitetsmatrisen).
- Dersom $A$ ikke er inverterbar, vil prosessen stoppe ved at man ender opp med en nullrad på høyre side av skillelinjen.



## Eksempel

Finn $A^{-1}$, dersom

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

# Ikke-singulære matriser

**Teorem**

*La $A$ være en $n \times n$-matrise. Følgende er ekvivalent*

1. *$A$ er inverterbar.*
2. *$A$ er radekvivalent med identitetsmatrisen.*
3. *$Ax = 0$ har kun den trivielle løsningen.*
4. *For enhver $n$-vektor $\mathbf{b}$ har systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en entydig løsning.*
5. *For enhver $n$-vektor $\mathbf{b}$ er systemet $A\mathbf{x} = b$ konsistent.*

*Dersom $A$ har en av disse egenskapene (og dermed alle) kalles den ikke-singulær. I motsatt fall sier vi at $A$ er singulær.*