Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Dag Wessel-Berg tlf. 73 59 13 43 / 924 48 828
Morten Dahlby tlf. 73 59 16 50 / 980 71 989

TMA4110 Matematikk 3 (løsningsforslag)

Bokmål: Semesterprøve mandag 6. oktober 2008
Tid: 08:15-09:45

Hjelpemidler: Enkel kalkulator og Rottmann.
Prøven har tre sider med totalt 10 oppgaver.
NB: Sett *ett* kryss for hver oppgave på svararket.

Oppgave 1 Hva er argumentet θ til $(-1+\mathrm{i})^7$?

$\boxed{\textbf{A: } -\frac{3\pi}{4}}$ **B:** $-\frac{\pi}{4}$ **C:** $\frac{\pi}{4}$ **D:** $\frac{3\pi}{4}$

Vi skriver først $-1+\mathrm{i}$ på polar form $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}}$ (tegn figur). Da er

$$(-1+\mathrm{i})^7 = \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}}\right)^7 = 8\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{21\pi\mathrm{i}}{4}} = 8\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}}$$

siden $\frac{21\pi}{4} = 6\pi - \frac{3\pi}{4}$.

Oppgave 2 Hvilket kjeglesnitt i det komplekse plan beskriver ligningen

$$z^2 = \bar{z}^2 + 4\mathrm{i}?$$

A: parabel $\boxed{\textbf{B: }\text{hyperbel}}$ **C:** sirkel **D:** ellipse

Skriv $z = x + \mathrm{i}y$, da får vi ligningen

$$x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2 = x^2 - 2\mathrm{i}xy - y^2 + 4\mathrm{i}?$$

Det gir oss $xy = 1$ som er en hyperbel.

Oppgave 3 For hvilke $d > 0$ er systemet $4y'' + dy' + 4y = 0$ overdempet?

A: ingen $d > 0$ **B:** $d < 8$ $\boxed{\textbf{C: } d > 8}$ **D:** $d = 8$

For at ligningen $my'' + cy' + ky = 0$ skal være overdempet må $c^2 > 4mk$, det vil si vi må ha to distinke reelle røtter. I dette tilfellet har vi $d^2 > 64$.

Oppgave 4 Hva blir $y(1)$ for løsningen på følgende startverdiproblem?

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + \left(4 + \pi^2\right) y &= 0, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= -2 \end{aligned}$$

A: $-\mathrm{e}^2$ $\boxed{\textbf{B: } -\mathrm{e}^{-2}}$ **C:** e^{-2} **D:** e^2

Karakteristisk ligning er $\lambda^2 + 4\lambda + (4 + \pi^2) = 0$ med løsninger $\lambda = -2 \pm \pi\mathrm{i}$. Generell løsning er derfor $y(x) = \mathrm{e}^{-2x}(c_1 \cos \pi x + c_2 \sin \pi x)$. Setter vi inn for initialbetingelsene får vi $c_1 = 1$ og $c_2 = 0$. Løsningen er dermed

$$y(x) = \mathrm{e}^{-2x} \cos \pi x.$$

Sett inn $x = 1$ for å få svaret på oppgaven.

Oppgave 5 Hvilken form har den partikulære løsningen y_p av ligningen

$$y'' + 2y' + 2y = x\mathrm{e}^{-x} \cos x?$$

A: $(Ax^2 + Bx)\,\mathrm{e}^{-x} \cos x$ **B:** $\mathrm{e}^{-x}(A \cos x + B \sin x)$

C: $\mathrm{e}^{-x}((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x)$ $\boxed{\textbf{D: } \mathrm{e}^{-x}((Ax^2 + Bx)\cos x + (Cx^2 + Dx)\sin x)}$

Vi løser først den homogene ligningen. Karakteristisk ligning har løsningene $\lambda = -1 \pm \mathrm{i}$, det gir $y_h(x) = \mathrm{e}^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$. Vi bruker ubestemte koeffisienters metode til å bestemme den partikulære løsningen y_p. I utgangspunktet velger vi partikulær løsning på formen $\mathrm{e}^{-x}((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x)$, men siden $\mathrm{e}^{-x} \cos x$ og $\mathrm{e}^{-x} \sin x$ er en del av den homogene løsningen, må vi bruke modifikasjonsregelen (gange med x) som gir svaret på oppgaven.

Oppgave 6 Hvilket av alternativene er generell løsning av ligningen

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = x^4?$$

A: $c_1 x^2 + c_2 x^3 - \frac{1}{2}x^4$ $\boxed{\textbf{B: } c_1 x^2 + c_2 x^3 + \tfrac{1}{2}x^4}$

C: $c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4$ **D:** $c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4$

Løs først den homogene ligningen (Euler-Cauchy) ved å sette inn $y = x^m$. Det gir $m_1 = 2$ og

$m_2 = 3$ som tilsvarer $y_1 = x^2$ og $y_2 = x^3$. Vi bruker metoden med variasjon av parametrene for å finne løsningen av den inhomogene ligningen.

$$r(x) = \frac{x^4}{x^2} = x^2$$
$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = x^4$$

Sett dette inn i formelen

$$\begin{aligned} y_p(x) &= -y_1 \int \frac{y_2 r}{W}\,\mathrm{d}x + y_2 \int \frac{y_1 r}{W}\,\mathrm{d}x \\ &= -x^2 \int x\,\mathrm{d}x + x^3 \int \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^4 \end{aligned}$$

$y = y_h + y_p$ gir oss svaret.

Oppgave 7 Hva er redusert echelonform (trappeform) for matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}?$$

A: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{B:} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$ **C:** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **D:** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \\ \rightarrow &\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \qquad R_2 := R_2 - R_1, \quad R_3 := R_3 - 2R_1 \\ \rightarrow &\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_1 := R_1 - 4R_2, \quad R_3 := R_3 + 3R_1 \end{aligned}$$

Oppgave 8 For hvilke a og b har ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ b & 2 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} ab \\ b^2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

entydig løsning?

A: $-12 - 4a + 3b + ab = 0$

B: $-12 - 4a + 3b + ab \neq 0$

C: $12 - 4a - 3b + ab = 0$

D: $12 - 4a - 3b + ab \neq 0$

Vi Gausseliminerer matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & a & ab \\ 2 & 1 & 1 & b^2 \\ b & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

og får

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & a & ab \\ 0 & -5 & 1-2a & b^2-2ab \\ 0 & 0 & 12-4a-3b+ab & 5+b^2a+2b^2-4ab-3b^3 \end{bmatrix}$$

For at systemet skal ha entydig løsning må $12 - 4a - 3b + ab \neq 0$.

Oppgave 9 Vi utfører følgende elementære radoperasjoner på 3×3-matrisen A

1. Trekk rad 2 tre ganger fra rad 3 ($R_3 := R_3 - 3R_2$).
2. Bytt rad 2 og rad 3 ($R_2 \leftrightarrow R_3$).
3. Del rad 2 på 2 ($R_2 := \frac{1}{2}R_2$).

og ender opp med matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Hva er determinanten til A?

A: $-\frac{3}{2}$

$\boxed{\textbf{B: } -6}$

C: 3

D: 6

Vi finner determinanten til B ved å multiplisere diagonalelementene, $\det(B) = 3$. Ved hjelp av reglene for determinanter ser vi at $\det(A) = -2\det(B) = -6$. (Bytting av rader $\rightarrow$ bytting av fortegn, multiplisere en rad $\rightarrow$ multiplisere determinanten, addering av en rad til en annen $\rightarrow$ ingen endring.)

Oppgave 10 Hvilke(t) utsagn er generelt riktig for (reelle) 2×2-matriser

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}?$$

1. Hvis $a_{12} = a_{21} = 0$ så er A inverterbar.
2. Elementene a_{11}, a_{12}, a_{21} og a_{22} kan velges slik at $\det\left(\left(A^3\right)^{-1}\right) = -1$.

A: verken 1 eller 2 **B:** bare 1 $\boxed{\textbf{C:}\text{ bare 2}}$ **D:** både 1 og 2

1. Feil. Se feks nullmatrisen.
2. Riktig.
$$\det\left(\left(A^3\right)^{-1}\right) = \frac{1}{\det\left(A^3\right)} = \frac{1}{\left(\det\left(A\right)\right)^3}$$
Så det holder med andre ord å finne A slik at $\det\left(A\right) = -1$. Dette kan gjøres på mange måter, for eksempel
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$