Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Eugenia Malinnikova (47055678)

TMA4110 MATEMATIKK 3 (løsningsforslag)
Semesterprøve tirsdag 6. oktober 2009
Tid: 14:15 – 15:45 (90 minutter)

Hjelpemidler: Enkel kalkulator (HP30S eller Citizen SR-270X)
Rotmann: *Matematisk formelsamling*
Oppgavearket har to sider med totalt 10 oppgaver.
Merk: Sett *et* kryss for hver oppgave på svararket. *Ikke* skriv på oppgavearket.

Oppgave 1 Hvor mange løsninger ($z \neq 0$) har ligningen $z - \bar{z} = z^2$?

A: ingen **B:** 1 $\boxed{\textbf{C: } 2}$ **D:** mer enn 2

Vi skriver $z = x + iy$ på normal form inn i ligningen $z - \bar{z} = z^2$. Da får vi $2iy = x^2 - y^2 + 2ixy$. Det gir oss $y = xy$ og $x^2 = y^2$. Hvis $z \neq 0$ så blir det $x = 1$ og $y = \pm 1$.

Oppgave 2 Hvis $z^3 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, hva blir minste positivt heltall n slik at z^n er et reelt tall?

A: 6 **B:** 9 $\boxed{\textbf{C: } 18}$ **D:** 36

Vi har $z = \sqrt[3]{2}e^{i\phi}$ hvor

$$\phi = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3} = \frac{\pi(12k+1)}{18}, \ k = 0, 1, 2.$$

Da er $z^n = (\sqrt[3]{2})^n e^{in\phi}$, dette er et reelt tall hvis og bare hvis $n\phi = l\pi$ hvor l er et heltall. Vi ser at det minste n er 18.

Oppgave 3 Hva er $y\left(\frac{\pi}{3}\right)$ til løsningen på startverdiproblemet

$$y'' - 2y' + 10y = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$$

A: $e^{\frac{\pi}{3}}$ $\boxed{\textbf{B: } -e^{\frac{\pi}{3}}}$ **C:** $e^{-\frac{\pi}{3}}$ **D:** $-e^{-\frac{\pi}{3}}$

Den karakteristiske ligningen er $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ med løsninger $\lambda = 1 \pm 3i$. Generell løsning er derfor $y(x) = e^x(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$. Vi setter inn for initialbetingelsene og får $c_1 = 1$ og $c_2 = -1/3$. Løsningen er

$$y(x) = e^x(\cos 3x - \frac{1}{3}\sin 3x).$$

Vi setter inn $x = \pi/3$.

Oppgave 4 La ligningen

$$y'' + 8y' + 16y = x^2 e^{-4x}$$

være gitt. Hvilket uttrykk for en partikulærløsning y_p skal brukes i metoden for ubestemte koeffisienter?

A: $y_p = e^{-4x}(Ax^2 + Bx + C)$ **B:** $y_p = e^{-4x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx)$
C: $y_p = e^{-4x}Ax^2$ $\boxed{\textbf{D: } y_p = e^{-4x}(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2)}$

Vi løser først den homogene ligningen; karakteristisk ligning har dobbelrot $\lambda = -4$. I utgangspunktet velger vi partikulær løsning på formen $(Ax^2 + Bx + C)e^{-4x}$, men siden e^{-4x} og xe^{-4x} er løsninger av den homogene ligningen, må vi bruke modifikasjonsregelen og gange med x^2, det gir svaret.

Oppgave 5 Vi ser på frie svinginger. La massen være $m = 1.0\,kg$ og dempingskonstant $c = 2\,kg/s$. For hvilke verdier av fjærkonstanten $k > 0$ er systemet overdempet?

A: $k \neq 1\,kg/s^2$ **B:** $k > 1\,kg/s^2$ **C:** $k = 1\,kg/s^2$ $\boxed{\textbf{D: } k < 1\,kg/s^2}$

For at systemet skal være overdempet må $c^2 > 4km$. I dette tilfellet får vi $k < 1$.

Oppgave 6 Differensialligningen $x^2y'' - 5xy' + by = 0,\ x > 0$, har to lineært uavhengige løsninger $y_1 = x^4$ og $y_2 = x^m$. Bestem m.

A: $m = 1$ $\boxed{\textbf{B: } m = 2}$ **C:** $m = -3$ **D:** $m = -9$

Vi ser at 4 og m er to røtter av ligning $l^2 - 6l + b = 0$. Da er $b = 8$ og $m = 2$.

Oppgave 7 Hvilket par av funksjoner $y_1(x), y_2(x)$ kan ikke være lineært uavhengige løsninger av en 2.ordens lineær homogen ligning $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ på intervallet $(-1, 1)$?

$\boxed{\textbf{A: } y_1 = x, y_2 = x^2}$ **B:** $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{2x}$ **C:** $y_1 = 1, y_2 = x$ **D:** $y_1 = e^x \cos x, y_2 = e^x \sin x$

Vi ser at $W(x, x^2)(0) = 0$, da kan $y_1 = x$ og $y_2 = x^2$ ikke være lineære uavhengige løsninger til en 2.ordens lineær homogen ligning på intervallet $(-1, 1)$.

Oppgave 8 Bestem redusert echelon form for matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 7 & 10 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **B**: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **C**: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{D}: \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 7 & 10 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)R_1+R_2, -R_1+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-3)R_2+R_1, 2R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oppgave 9 Gitt at $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $AB = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, regn ut B.

$\boxed{\textbf{A}: \begin{bmatrix} -11 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}}$ **B**: $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -16 & -10 & -4 \end{bmatrix}$ **C**: $\begin{bmatrix} 5 & -17 & 0 \\ 4 & -14 & 0 \end{bmatrix}$ **D**: $\begin{bmatrix} -16 & -5 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Vi finner A^{-1} først, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Da blir $B = A^{-1}(AB) = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Oppgave 10 For hvilke(n) k er matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 4 \\ k & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

ikke inverterbar?

A: $k = 2$ **B:** $-1 \leq k \leq 2$ **C:** $k = -1$ $\boxed{\textbf{D: } k = 2 \text{ og } k = -1}$

Vi beregner determinanten til matrisen

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 4 \\ k & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & k+1 & 3 \\ 0 & k+1 & 5-k \end{vmatrix} = (k+1)(5-k) - 3(k+1) = -(k+1)(k-2).$$