Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Dag Wessel-Berg tlf. 73 59 13 43 / 924 48 828
Morten Dahlby tlf. 73 59 16 50 / 980 71 989

TMA4110 Matematikk 3 (løsningsforslag)

Bokmål
Semesterprøve tirsdag 7. oktober 2008
Tid: 08:15-09:45

Hjelpemidler: Enkel kalkulator og Rottmann.
Prøven har tre sider med totalt 10 oppgaver.
NB: Sett *ett* kryss for hver oppgave på svararket.

Oppgave 1 La $z = 2 - \mathrm{i}$ og $w = -1 + 3\mathrm{i}$. Hva er realdelen til $z\frac{\bar{w}}{w}$?

$\boxed{\textbf{A: } -1}$ **B:** 1 **C:** -2 **D:** 2

$$z\frac{\bar{w}}{w} = z\frac{\bar{w}}{w}\frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{(2-\mathrm{i})(-1+3\mathrm{i})^2}{1^2+3^2} = -1+2\mathrm{i}$$

Oppgave 2 Hvor mange løsninger har ligningen $|z|^2 = \mathrm{i}\bar{z}$?

A: ingen **B:** 1 $\boxed{\textbf{C: } 2}$ **D:** 3

Sett inn $z = x + \mathrm{i}y$ i ligningen, det gir

$$x^2 + y^2 = \mathrm{i}x + y$$

Siden både x og y er reelle, må $x = 0$. Det gir $y^2 = y$ som har løsningene $y = 0$ og $y = 1$. Med andre ord får vi de to løsningene $(x, y) = (0, 0)$ og $(x, y) = (0, 1)$.

Oppgave 3 For hvilke k vil løsningene av $y'' + 2ky' + (k+1)\,y = 0$ ha uendelig mange nullpunkt?

A: $k < \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$ $\boxed{\textbf{B: } \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) < k < \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)}$
C: $k > \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$ **D:** $k = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$ eller $k = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$

Den karakteristiske ligningen er $\lambda^2 + 2k\lambda + (k+1) = 0$ som har løsningene

$$\lambda = -k \pm \sqrt{k^2 - k - 1}$$

For at λ skal være kompleks må $k^2 - k - 1 < 0$, da er løsningen på formen $y = \mathrm{e}^{-\alpha x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right)$ og den har uendelig mange nullpunkt. Ved å løse ulikheten får man svaret.

Oppgave 4 Hva blir $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ for løsningen på følgende startverdiproblem?

$$y'' + y = \sin x$$
$$y\,(0) = 0$$
$$y'\,(0) = 1$$

A: $-\frac{1}{2}$ **B:** $\frac{1}{2}$ **C:** $-\frac{3}{2}$ $\boxed{\textbf{D: } \frac{3}{2}}$

Vi løser først den homogene ligningen. Karakteristisk ligning er $\lambda^2 - 1 = 0$ som gir

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Siden høyreside er lik en av de homogene løsningene må vi bruke modifikasjonsregelen (gange med x). Det gir en partikulær løsning på formen

$$y_p(x) = Ax \sin x + Bx \cos x$$

Ved å sette inn i ligningen finner vi at $A = -\frac{1}{2}$ og $B = 0$. Initialbetingelsene gir $c_1 = 0$ og $c_2 = \frac{3}{2}$. Så endelig løsning er

$$y(x) = \frac{3}{2}\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$$

Oppgave 5 La y_1 og y_2 være løsninger av $y'' - 2y' + y = 0$, der Wronskideterminanten til y_1 og y_2, $W\,(x)$, oppfyller $W\,(0) = 1$. Hva er $W\,(1)$?

A: $-\mathrm{e}^{-2}$ **B:** e^{-2} **C:** $-\mathrm{e}^{2}$ $\boxed{\textbf{D: } \mathrm{e}^{2}}$

Karakteristisk ligning er $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ og en basis er dermed e^x og $x\mathrm{e}^x$. Superposisjonsprinsippet gir oss da at alle løsninger kan skrives på formen

$$y_1 = c_1\mathrm{e}^x + c_2 x\mathrm{e}^x \quad \text{og} \quad y_2 = c_3\mathrm{e}^x + c_4 x\mathrm{e}^x$$

Vi beregner så Wronskideterminanten

$$W(x) = (c_1c_4 - c_2c_3)\,\mathrm{e}^{2x}$$

Opplysningen $W(0) = 1$ gis oss $c_1c_4 - c_2c_3 = 1$. Med andre ord har vi

$$W(x) = \mathrm{e}^{2x}$$

Oppgave 6 Hva er generell løsning av $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^2$, $x > 0$?

A: $y = C_2x^2 + C_1x + C_0$ $\boxed{\textbf{B: } y = -x^2\ln x + C_1x^2 + C_2x^3}$
C: $y = C_1x^3 + C_2x^2 - \ln x$ **D:** $y = -x^2(\ln x + 1)$

Finner først homogen løsning ved innsetting av x^m, det gir ligningen $m^2 - 5m + 6 = 0$ med løsningene $m_1 = 2$ og $m_2 = 3$. Homogen løsning er dermed

$$y_h(x) = \tilde{C}_1x^2 + \tilde{C}_2x^3$$

Vi finner partikulær løsning ved hjelp av metoden for variasjon av parametrene.

$$\begin{aligned} W(x) &= 3x^4 - 2x^4 = x^4 \\ r(x) &= 1 \\ y_p(x) &= -x^2\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + x^3\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -x^2\ln x - x^2 \end{aligned}$$

Generell løsning er summen av homogen og partikulær løsning

$$y(x) = \tilde{C}_1x^2 + \tilde{C}_2x^3 - x^2\ln x - x^2 = C_1x^2 + C_2x^3 - x^2\ln x$$

der $C_1 = \tilde{C}_1 - 1$ og $C_2 = \tilde{C}_2$.

Oppgave 7 Hva er redusert echelonform (trappeform) for matrisen

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -1 & -6 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 6 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}?$$

A: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -\frac{1}{3} & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{B:} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$

C: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **D:** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -1 & -6 & -1 \\ -3 & -6 & 1 & 6 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 3 & 6 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad R_2 := R_2 + R_1, \quad R_3 := R_3 + \frac{2}{3}R_1$$
$$\to \begin{bmatrix} 3 & 6 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad R_2 \leftrightarrow R_3$$
$$\to \begin{bmatrix} 3 & 6 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_2 := 3R_2, \quad R_3 := -R_3$$
$$\to \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_1 := R_1 + R_2, \quad R_2 := R_2 - R_3$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_1 := \frac{1}{3}R_1$$

Oppgave 8 For hvilke a og b har ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & b^2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b \\ 2b-1 \\ a+b+1 \end{bmatrix}$$

uendelig mange løsninger?

$\boxed{\textbf{A: } (a,b) = (-1, \pm 1)}$ **B:** $(a,b) = (1, \pm 1)$ **C:** $(a,b) = (\pm 1, -1)$ **D:** $(a,b) = (\pm 1, 1)$

Vi Gausseliminerer matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & b \\ 4 & 3 & 3 & 2b-1 \\ 2 & 1 & b^2 & a+b+1 \end{bmatrix}$$

og får

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & b^2-1 & a+1 \end{bmatrix}$$

For at systemet skal ha uendelig mange løsninger må både $b^2 - 1 = 0$ og $a + 1 = 0$, det vil si $b = \pm 1$ og $a = -1$.

Oppgave 9 Gitt tre kvadratiske matriser A, B og C som oppfyller

$$AB = C$$

Hva er A^{-1} uttrykt ved B og C?

A: $B^{-1}C^{-1}$ **B:** BC $\boxed{\textbf{C: } BC^{-1}}$ **D:** $C^{-1}B$

Det er mange måter å komme fram til svaret på, en av dem er

$$\begin{aligned} AB &= C \\ A &= CB^{-1} \\ A^{-1} &= \left(CB^{-1}\right)^{-1} = BC^{-1} \end{aligned}$$

Oppgave 10 Hvilke(t) utsagn er generelt riktig for (reelle) 2×2-matriser

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}?$$

1. Hvis $\det(A) = 1$ og $A = 3B$ så er $\det(B) = 9$.
2. Anta at elementene i A oppfyller

   $$c_1 a_{11} + c_2 a_{21} = 0 \quad \text{og} \quad c_1 a_{12} + c_2 a_{22} = 0,$$

   der minst en av konstantene c_1 og c_2 er ulik 0. Da er $\det(A) = 0$.

A: verken 1 eller 2 **B:** bare 1 $\boxed{\textbf{C: } \text{bare 2}}$ **D:** både 1 og 2

1. Feil. $\det B = \det\left(\frac{1}{3}A\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \det A = \frac{1}{9}$.

2. Riktig. Anta $c_1 \neq 0$ (konklusjonen er den samme for $c_2 \neq 0$). Av opplysningen vi får i oppgaven ser vi at $a_{11} = -\frac{c_2}{c_1}a_{21}$ og $a_{12} = -\frac{c_2}{c_1}a_{22}$. Matrisen A kan skrives som

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{c_2}{c_1}a_{21} & -\frac{c_2}{c_1}a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

og determinanten er $\det A = -\frac{c_2}{c_1}a_{21}a_{22} + \frac{c_2}{c_1}a_{22}a_{21} = 0$.