Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Dag Wessel-Berg tlf. 92448828

TMA4110 MATEMATIKK 3 (løsningsforslag)
Semesterprøve torsdag 8. oktober 2009
Tid: 12:15 – 13:45 (90 minutter)

Hjelpemidler: Enkel kalkulator (HP30S eller Citizen SR-270X)
Rotmann: *Matematisk formelsamling*
Oppgavearket har to sider med totalt 10 oppgaver.
Merk: Sett *et* kryss for hver oppgave på svararket. *Ikke* skriv på oppgavearket.

Oppgave 1 Hvor mange løsninger har ligninger $1 + iz = \bar{z}(z - i)$?

A: ingen **B:** 1 $\boxed{\textbf{C: } 2}$ **D:** mer enn 2

Vi skriver $z = x + iy$ på normal form inn i ligningen $1 + iz = \bar{z}(z - i)$. Da får vi $1 + ix - y = x^2 + y^2 - ix + y$. Det gir oss $1 - y = x^2 + y^2 + y$ og $x = -x$. Så blir det $x = 0$ og $y^2 + 2y - 1 = 0$, $y = -1 \pm \sqrt{2}$.

Oppgave 2 Hvor mange løsninger av ligninger $z^5 = (1 + i)^2$ har positiv imaginærdel?

A: 1 **B:** 2 $\boxed{\textbf{C: } 3}$ **D:** 5

Vi har $(1 + i)^2 = 2i$ og løsningene til ligningen er $z_k = \sqrt[5]{2}e^{i\phi_k}$ hvor

$$\phi_k = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5} = \frac{\pi(4k + 1)}{10}, \ k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Da ϕ_k er vinkel mellom 0 og π hvis $k = 0, 1, 2$ ellers blir ϕ_k mellom π og 2π.

Oppgave 3 Hva er $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$ til løsningen på startverdiproblemet

$$y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 1?$$

A: e^{π} $\boxed{\textbf{B: } -e^{\pi}}$ **C:** $e^{-\pi}$ **D:** $-e^{-\pi}$

Den karakteristiske ligningen er $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ med løsninger $\lambda = 2 \pm i$. Generell løsning er derfor $y(x) = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$. Vi setter inn for initialbetingelsene og får $c_1 = 1$ og $c_2 = -1$. Løsningen er

$$y(x) = e^{2x}(\cos x - \sin x).$$

Vi setter inn $x = \pi/2$.

Oppgave 4 La ligningen

$$y'' + 10y' + 25y = xe^{-5x}$$

være gitt. Hvilket uttrykk for en partikulær løsning y_p skal brukes i metoden for ubestemte koeffisienter?

A: $y_p = e^{-5x}(Ax + B)$ **B:** $y_p = e^{-5x}(Ax^2 + Bx)$
C: $y_p = e^{-4x}Ax$ **D:** $y_p = e^{-4x}(Ax^3 + Bx^2)$

Vi løser først den homogene ligningen; karakteristisk ligning har dobbelrot $\lambda = -5$. I utgangspunktet velger vi partikulær løsning på formen $(Ax + B)e^{-5x}$, men siden e^{-5x} og xe^{-5x} er løsninger av den homogene ligningen, må vi bruke modifikasjonsregelen og gange med x^2, det gir svaret $y_p = e^{-5x}(Ax^3 + Bx^2)$.

Ingen av alternativene er riktig. Oppgaven blir ikke tellende i semesterprøven!

Oppgave 5 For hvilke verdier av k vil løsningene på ligningen $y'' + ky' + 9y = 0$ ha uendelig mange nullpunkt?

A: $k > 9$ **B:** $k < 6$ **C:** $k > -6$ $\boxed{\textbf{D: } -6 < k < 6}$

Løsningene har uendelig mange nullpunkt når røtter til den karakteristeske ligningen er komplekse, så $k^2 - 36 < 0$, dette gir $|k| < 6$.

Oppgave 6 Differensialligningen $x^2y'' + axy' + by = 0,\ x > 0$, har to lineære uavhengige løsninger $y_1 = x^3$ og $y_2 = x^{-1}$. Bestem $a + b$.

A: -2 **B:** -3 $\boxed{\textbf{C: } -4}$ **D:** -5

Vi ser at 3 og -1 er to røtter av ligning $l^2 + (a - 1)l + b = 0$. Da er $b = -3$ og $a = -1$, $a + b = -4$.

Oppgave 7 La $y_1(x), y_2(x)$ være løsninger på $y'' - 2y' + 2y = 0$ med Wronskideterminant $W(y_1, y_2) = W(x)$. Hvis $W(0) = 2$, hva er $W(1)$?

$\boxed{\textbf{A: } 2e^2}$ **B:** $3e^2$ **C:** $2e^{-2}$ **D:** $3e^{-2}$

Karakteristisk ligning er $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ og $y_1 = e^x(a_1 \cos x + b_1 \sin x)$, $y_2 = e^x(a_2 \cos x + b_2 \sin x)$. Da har vi $W(x) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = e^{2x}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$ og hvis $W(0) = 2$ så er $W(2) = 2e^{2x}$.

Oppgave 8 For hvilke(n) a har ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= a \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= a + 1 \\ ax_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

uendelig mange løsninger?

A: ingen **B**: $a \neq 1$ **C**: $a = 0$ $\boxed{\textbf{D}: a = 1}$

Vi ser på totalmatrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 2 & 3 & a+1 \\ 0 & a & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & a & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-a)R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3-3a & 1-a \end{bmatrix}$$

Systemet har uendelig mange løsninger når $a = 1$.

Oppgave 9 Hvis $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, hva er $(AB)^{-1}$?

$\boxed{\textbf{A}: \begin{bmatrix} -20 & 53 \\ 17 & -45 \end{bmatrix}}$ **B**: $\begin{bmatrix} 44 & -37 \\ -25 & 21 \end{bmatrix}$ **C**: $\begin{bmatrix} -9 & 7 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ **D**: $\begin{bmatrix} 21 & -37 \\ -25 & 44 \end{bmatrix}$

Vi har $AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 45 & 53 \\ 17 & 20 \end{bmatrix}$, dette gir $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} -20 & 53 \\ 17 & -45 \end{bmatrix}$.

Oppgave 10 Bestem derminanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{A: } 16}$ **B:** 30 **C:** 48 **D:** 64

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = (-4)(24-28) = 16.$$