TMA4110 MATEMATIKK 3

Semesterprøve tirsdag 9. oktober 2007

Løsningsforslag

Oppgave 1 Hva er imaginærdelen til $(1-i)^{10}$?

A: 0 **B:** 32 $\boxed{\textbf{C:}\ -32}$ **D:** $-32i$

Vi har $(1-i)^2 = 1-2i-1 = -2i$, og $(1-i)^{10} = (-2i)^5 = -2^5 i^5 = -32i$. Så kan $(1-i)^{10}$ skrives på formen $x+iy$, med $x=0$ og $y=-32$, $(1-i)^{10} = 0+(-32)i$. Vi får at -32 er imaginærdelen til $(1-i)^{10}$. Merk at imaginærdelen til et komplekstall er alltid et reelt tall.

Alternativt: Vi gjør $1-i$ om til polarform. Hvis $1-i = re^{i\theta}$, så får vi $r=\sqrt{2}$ og $\theta = -\frac{\pi}{4}$. Da er $(1-i)^{10} = 2^5 e^{-5i\pi/2} = -32i$. Og imaginærdelen blir -32.

Oppgave 2 Hvor mange løsninger $z \neq 0$ har ligningen $\bar{z}^2 = 5i|z|$?

A: en $\boxed{\textbf{B:}\ \text{to}}$ **C:** tre **D:** fire

Med $z = re^{i\phi}$ blir $\bar{z}^2 = r^2 e^{-2i\phi}$ og $|z| = r$. Den gitte ligningen kan skrives som $r^2 e^{-2i\phi} = 5ir$. Vi antar at $z \neq 0$, som gir $r > 0$. Da får vi $re^{-2i\phi} = 5i$. Dette gir $r = 5$, $2\phi = -\pi/2 + 2\pi k$, hvor k er et heltall. Ligningen har to løsninger $z_1 = 5e^{-i\pi/4}$ og $z_2 = 5e^{i3\pi/4}$.

Oppgave 3 Hva er $y''(0)$ til løsningen på initialverdiproblemet

$$y'' + y' = 20y, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1?$$

$\boxed{\textbf{A:}\ -1}$ **B:** 1 **C:** 2 **D:** 9

Vi skriver ligningen på standardform $y'' + y' - 20y = 0$. Røttene til den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + \lambda - 20 = 0$ er $\lambda_1 = 4$ og $\lambda_2 = -5$. En generell løsning er følgelig $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-5x}$. Vi har også $y' = 4c_1 e^{4x} - 5c_2 e^{-5x}$ og $y'' = 16c_1 e^{4x} + 25c_2 e^{-5x}$. Initialbetingelsene gir $c_1 + c_2 = 0$ og $4c_1 - 5c_2 = 1$. Følgelig er $c_1 = 1/9$ og $c_2 = -1/9$. Så får vi $y = 1/9e^{4x} - 1/9e^{-5x}$ og $y''(0) = 16/9 - 25/9 = -1$.

Alternativt: $y''(0) + y'(0) = 20y(0)$ gir $y''(0) = 20y(0) - y'(0) = 0 - 1 = -1$.

Oppgave 4 Hvis y_1 og y_2 er løsninger av ligningen $y'' + x^2 e^{-x} y' + y = x^4$, hvilken av funksjonene er løsning av $y'' + x^2 e^{-x} y' + y = 3$?

A: $3y_1$ **B:** $\frac{3}{2}(y_1 + y_2)$ $\boxed{\textbf{C:}\ 3 + y_1 - y_2}$ **D:** $3(y_1 - y_2)$

Hvis y_1 og y_2 er løsninger av $y'' + p(x)y' + y = x^4$, i oppgaven har vi $p(x) = x^2 e^{-x}$, da må $y_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2$ bli en løsning av $y'' + p(x)y' + y = (c_1 + c_2)x^4$, også $y_0'' + p(x)y_0' + y_0 \neq 3$. Av de fire alternativene er det bare $y = 3 + y_1 - y_2$ som ikke er på den formen. Og for den har vi $y'' + p(x)y' + y = y_1'' - y_2'' + p(x)(y_1' - y_2') + (3 + y_1 - y_2) = 3 + x^4 - x^4 = 3$.

Oppgave 5 Differensialligningen $x^2y'' - 6y = 0$ har løsninger $y_1(x) = x^{m_1}$, $y_2(x) = x^{m_2}$ hvor $m_1 > m_2$. Hva blir Wronskideterminanten $W(y_1, y_2)$?

$\boxed{\textbf{A:} \quad -5}$ **B:** $-x^4$ **C:** x **D:** $-5x$

Ligningen er en Euler-Cauchyligning og dens karakteristiske ligning er $m^2 - m - 6 = 0$. Den har løsningene $m_1 = 3$ og $m_2 = -2$. Vi får $y_1 = x^3$ og $y_2 = x^{-2}$, $W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_2y_1' = -5$.

Oppgave 6 Et masse-fjærsystem har bevegelsesligning

$$9y'' + 6y' + y = 5 \sin t.$$

Hvilket av alternativene vil gi stasjonær løsning?

A: $\cos(t/3) + 0.2 \sin t$ $\boxed{\textbf{B:} \quad -0.3 \cos t - 0.4 \sin t}$

C: $0.4 \cos(2t/3)$ **D:** $e^{-t/3}(0.3 \cos t + 0.2 \sin t)$

Dette er et masse-fjærsystem med demping. Stasjonær løsning til bevegelsesligningen må bli da på formen $y(t) = A \cos t + B \sin t$. Av de fire alternativene er det bare $y(t) = -0.3 \cos t - 0.4 \sin t$ som er på den formen.

Oppgave 7 Ligningssystemet

$$5x + 6y - 11z = 0, \quad 3x - 2z = a + 1, \quad x + y - z = 1$$

har løsning $x = x_0,\ y = y_0, z = z_0$. Bestem z_0.

A: 1 **B:** $\dfrac{a}{8}$ $\boxed{\textbf{C:} \quad 1 - \dfrac{a}{17}}$ **D:** $\dfrac{15 - a}{7}$

Vi bruker Gausseliminasjon for å løse systemet:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & -11 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & a+1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{SWAP(R_1,R_3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & a+1 \\ 5 & 6 & -11 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-5)R_1+R_3]{(-3)R_1+R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & a-2 \\ 0 & 1 & -6 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{SWAP(R_2,R_3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & -5 \\ 0 & -3 & 1 & a-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -17 & a-17 \end{bmatrix}$$

Dette gir $z_0 = (a - 17)/(-17) = 1 - \dfrac{a}{17}$.

Oppgave 8 Hvilken av matrisene er ikke på echelonform?

A: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{B:} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}$ **C:** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 10 & -5 \end{bmatrix}$ **D:** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matrisen i B er ikke på echelonform siden lederelementene i andre og tredje rad er i samme kolonne. Alle andre matrisene er på echelonform. Matrisene i A og D er også reduserte echelonmatriser.

Oppgave 9

Hva blir $A^{-1} + B^{-1}$ hvis $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$?

$\boxed{\textbf{A:} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}}$ **B:** $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ **C:** $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$ **D:** $\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

Vi har $\det A = 1$ og $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, videre har vi $\det B = 1$ og $B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. Dette gir $A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

Oppgave 10 La A og B være to $n \times n$-matriser. Hvilket utsagn er ekvivalent til $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ har uendelig mange løsninger?

A: $\det(A) = \det(B)$ **B:** $\det(A) = \det(B) = 0$

C: $\det(A) = 0$ eller $\det(B)$=0 $\boxed{\textbf{D:} \det(A - B) = 0}$

Ligningen $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ kan skrives som $(A - B)\mathbf{x} = 0$. Den har uendelig mange løsninger hvis og bare hvis $\det(A - B) = 0$.