TMA4110 MATEMATIKK 3

Semesterprøve onsdag 10. oktober 2007

Løsningsforslag

Oppgave 1 Bestem imaginærdelen til produktet $z_1 z_2$ der $z_1 = e^{(7\pi/12)i}$ og $z_2 = 2e^{(\pi/6)i}$.

A: $-\sqrt{2}$ $\boxed{\textbf{B:}\ \sqrt{2}}$ **C:** $-\sqrt{3}$ **D:** $\sqrt{3}$

Vi har $z_1 z_2 = 2e^{(3\pi/4)i} = 2\big(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)\big) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$. Altså er $\operatorname{Im}(z_1 z_2) = \sqrt{2}$.

Oppgave 2 Mengden av komplekse tall $z = x + iy$ som oppfyller $z^2 + \bar{z}^2 = 2$ er

A: en rett linje. **B:** en sirkel med radius 1. $\boxed{\textbf{C:}\ \text{en hyperbel.}}$ **D:** en sirkel med radius $\sqrt{2}$.

Med $z = x + iy$ blir $z^2 + \bar{z}^2 = (x + iy)^2 + (x - iy)^2 = 2x^2 - 2y^2$. Ligningen $z^2 + \bar{z}^2 = 2$ blir derfor $x^2 - y^2 = 1$ som er ligning for en hyperbel.

Oppgave 3 Hvilket av alternativene er en generell løsning av ligningen

$$y'' + (\pi^2 + 1)y = 2y'\,?$$

A: $y = e^{-x}(c_1 \cos \pi x + c_2 \sin \pi x)$ **B:** $y = e^{\pi x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

$\boxed{\textbf{C:}\ y = e^{x}(c_1 \cos \pi x + c_2 \sin \pi x)}$ **D:** $y = e^{-\pi x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

Vi skriver ligningen på standardform $y'' - 2y' + (\pi^2 + 1)y = 0$, og løser den karakteristiske ligningen $\lambda^2 - 2\lambda + (\pi^2 + 1) = 0$. Vi får $\lambda = \frac{1}{2}\big(2 \pm \sqrt{4 - 4(\pi^2 + 1)}\big) = 1 \pm i\pi$. En generell løsning er følgelig $y = e^{x}(c_1 \cos \pi x + c_2 \sin \pi x)$.

Oppgave 4 For hvilket alternativ vil $y_1 = x$ og $y_2 = u y_1$ være en basis for løsningene av

$$x^2 y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 0, \quad x > 0\,?$$

$\boxed{\textbf{A:}\ u = e^x}$ **B:** $u = \ln x$ **C:** $u = xe^x$ **D:** $u = \dfrac{\ln x}{x}$

Vi setter inn $y = ux$, $y' = u'x + u$ og $y'' = u''x + 2u'$ i ligningen og vet at leddene med u vil falle bort (reduksjon av orden). Vi får $x^3 u'' - x^3 u' = 0$, det vil si $u'' - u' = 0$. Av de fire alternativene er det bare $u = e^x$ som oppfyller denne ligningen. Funksjonene $y_1 = x$ og $y_2 = xe^x$ utgjør altså en basis for løsningene av den gitte ligningen.

Oppgave 5 Hva blir $y(2)$ for løsningen av initialverdiproblemet

$$x^2y'' - 4xy' + 4y = 0, \qquad y(1) = 0, \quad y'(1) = 3\,?$$

A: 12 $\boxed{\textbf{B:}\ \ 14}$ **C:** 16 **D:** 18

Dette er en Euler–Cauchyligning, og vi setter inn $y = x^m$. Det gir ligningen $m^2 - 5m + 4 = 0$ med røtter $m_1 = 4$ og $m_2 = 1$. Generell løsning er følgelig $y = c_1x^4 + c_2x$. Initialbetingelsene gir de to ligningene $c_1 + c_2 = 0$ og $4c_1 + c_2 = 3$ med løsning $c_1 = 1$ og $c_2 = -1$. Følgelig er $y = x^4 - x$ og $y(2) = 14$.

Oppgave 6 Hva må konstanten a være hvis ligningen

$$y'' - 7y' + ay = xe^x$$

skal ha en partikulær løsning på formen $y_p = (Ax^2 + Bx)e^x$ med $A \neq 0$?

A: $a = 1$ **B:** $a = 2$ **C:** $a = 3$ $\boxed{\textbf{D:}\ \ a = 6}$

Med høyresiden $r(x) = xe^x$ vil vi ifølge ubestemte koeffisienters metode ha en partikulær løsning på formen $y_p = x(Ax + B)e^x$ hvis e^x er løsning av den homogene ligningen. Da må $\lambda = 1$ være rot i den karakteristiske ligningen $\lambda^2 - 7\lambda + a = 0$. Altså må vi ha $1 - 7 + a = 0$, det gir $a = 6$.

Oppgave 7 Et masse–fjærsystem uten dempning har bevegelsesligning

$$2y'' + ky = 0.6\cos 0.6t$$

der k er fjærkonstanten. For hvilken verdi av k blir det resonans?

A: $k = 0.12$ **B:** $k = 0.36$ **C:** $k = 0.60$ $\boxed{\textbf{D:}\ \ k = 0.72}$

Vi får resonans når $\omega = \omega_0$, der $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ er vinkelfrekvensen til det frie systemet og $\omega = 0.6$ er vinkelfrekvensen i den ytre kraften. Her er $m = 2$ så betingelsen for resonans blir $\sqrt{k/2} = 0.6$. Det gir $k = 0.72$.

Oppgave 8 Ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + \ \ z &= b \\ y - \ \ z &= 1 \\ x - y + \ \ z &= 1 \\ 2x + y + 3z &= b \end{aligned}$$

er konsistent for én enkelt b-verdi og har da entydig løsning $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. Bestem z_0.

A: $z_0 = 2$ **B:** $z_0 = 1$ **C:** $z_0 = 0$ $\boxed{\textbf{D:}\ \ z_0 = -1}$

Vi bruker Gausseliminasjon:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{array}\right] \xrightarrow[(-2)R_1+R_4]{(-1)R_1+R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1-b \\ 0 & -1 & 1 & -b \end{array}\right] \xrightarrow[(1)R_2+R_4]{(2)R_2+R_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3-b \\ 0 & 0 & 0 & 1-b \end{array}\right]$$

Vi ser at vi har entydig løsning når $b = 1$. Da har vi $-2z = 3 - b = 2$, og følgelig er $z_0 = -1$.

Oppgave 9 Bestem første kolonne i matrisen B dersom

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{A: } \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}}$ **B:** $\begin{bmatrix} -15 \\ -8 \end{bmatrix}$ **C:** $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ **D:** $\begin{bmatrix} -7 \\ 11 \end{bmatrix}$

Siden A er inverterbar ($\det(A) = -1$), kan vi muliplisere med A^{-1}. Ved å multiplisere fra venstre får vi

$$A^{-1}(AB) = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 3 & * & * \\ 1 & * & * \end{bmatrix} \text{ dvs. } B = \begin{bmatrix} -3 & * & * \\ -1 & * & * \end{bmatrix}$$

der $*$ betegner matriselementer vi ikke trenger å regne ut.

Oppgave 10 Hvilke(t) utsagn er generelt riktig for en 2×2–matrise A?

(1) Hvis $A^2 = \mathit{0}$, så er $\det(A) = 0$.

(2) Hvis $\det(A) = 1$, så er $\det(2A) = 2$.

A: verken (1) eller (2) $\boxed{\textbf{B: } \text{bare (1)}}$ **C:** bare (2) **D:** både (1) og (2)

Hvis $A^2 = \mathit{0}$, så er $\det(A^2) = 0$. Men $\det(A^2) = \det(A)^2$. Altså er $\det(A) = 0$, og (1) er riktig.

Vi har $\det(kA) = k^2 \det(A)$ når A er en 2×2–matrise og k er et tall. Følgelig er $\det(2A) = 4$ så (2) ikke riktig.