Institutt for matematiske fag

TMA4115 Matematikk 3

Semesterprøve tirsdag 3.mars 2009

Løsningsforslag

Oppgave 1 Hvilket av alternativene er polarform $r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ for

$$z = \frac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{-1+i}?$$

A: $\sqrt{2}e^{i\frac{4\pi}{3}}$ **B:** $\boxed{2e^{i\frac{4\pi}{3}}}$ **C:** $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ **D:** $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

Løsning: La $u = 1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)$ og $v = -1+i$ slik at z kan skrives $z = u/v$. Da har vi at

$$z = \frac{u}{v} = \frac{u\bar{v}}{|v|^2} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1))(-1-i) = \frac{1}{2}\cdot 2(-1-i\sqrt{3}) = -1-i\sqrt{3}.$$

Skriver vi dette på polarform $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ med $r = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = 2$ og $\theta = \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{-\sqrt{3}}{-1} = (\arctan\sqrt{3}) + \pi = 4\pi/3$ får vi at $z = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$ (alternativ **B**).

Oppgave 2 Avgjør om det fins et positivt heltall n slik at $(-1+i\sqrt{3})^n$ er et reelt tall, og bestem i så fall det minste slike tallet n.

A: Ingen n **B:** $\boxed{n = 3}$ **C:** $n = 6$ **D:** $n = 12$

Løsning: $-1+i\sqrt{3} = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}$, så $(-1+i\sqrt{3})^n = 2^n e^{\frac{2\pi n i}{3}}$. Dette er reelt hvis $\frac{2\pi n}{3} = k\pi$ og minste $n > 0$ blir $n = 3$ (alternativ **B**).

Oppgave 3 Generell løsning til $y'' + 6y' + 10y = 0$ er

A: $C_1e^{-3x}\cos 2x + C_2e^{-3x}\sin 2x$ **B:** $\boxed{C_1e^{-3x}\cos x + C_2e^{-3x}\sin x}$

C: $C_1e^{6x}\cos x + C_2e^{6x}\sin x$ **D:** $C_1e^{3x}\cos x + C_2e^{3x}\sin x$

Løsning: Karakteristisk ligning er $\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$ det vil si $\lambda = -3 \pm i$. Generell løsning blir da $C_1e^{-3x}\cos x + C_2e^{-3x}\sin x$ (alternativ **B**).

Oppgave 4 Hvilken av funksjonene vil sammen med $y_1 = x$ utgjøre en basis av løsninger for

$$\left(1 - \frac{x\cos x}{\sin x}\right)y'' - xy' + y = 0, \qquad 0 < x < \pi?$$

A: $y_2 = 1$ **B:** $y_2 = 2x$ **C:** $\boxed{y_2 = \sin x}$ **D:** $y_2 = \cos x$

Løsning: En sjekker at $y_1(x) = x$ er løsning og at alternativ **A** og **D** ikke er løsninger. Både **B** og **C** er løsninger, men **B** gir y_2 proporsjonal med y_1, så derfor blir svaret: alternativ **C**.

Oppgave 5 Et dempet masse/fjær-system har bevegelsesligning

$$y'' + cy' + 64y = 0$$

der c er dempningskoeffisienten ($c > 0$). For hvilken verdi av c fåes kritisk dempning?

A: 4 $\boxed{\textbf{B: } 16}$ **C:** 8 **D:** 64

Løsning: Karakteristisk ligning blir $\lambda^2 + c\lambda + 64 = 0$ det vil si $\lambda = \frac{1}{2}(-c \pm \sqrt{c^2 - 256})$. Kritisk demping svarer til en reell rot, det vil si $c^2 = 256$ eller $c = 16$ (alternativ **B**).

Oppgave 6 La $y(x)$ være løsningen av $2y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Hva er maksimal verdi for $e^{\frac{x}{2}} y(x)$?

A: 2 **B:** $\sqrt{3}$ **C:** 1 $\boxed{\textbf{D: } \sqrt{2}}$

Løsning: Karakteristisk ligning $2\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ det vil si $\lambda = \frac{1}{2}(-1 \pm 3i)$. Generell løsning blir da $y(x) = e^{-\frac{x}{2}}(A \cos \frac{3}{2}x + B \sin \frac{3}{2}x)$. Randkravet $y(0) = y'(0) = 1$ gir at $A = B = 1$, så

$$e^{\frac{x}{2}} y(x) = \cos \frac{3}{2}x + \sin \frac{3}{2}x.$$

Dette uttrykket har maksimal verdi når $\cos \frac{3}{2}x = \sin \frac{3}{2}x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Altså blir maksimal verdi $\sqrt{2}$ (alternativ **D**).

Oppgave 7 Finn alle k slik at $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$ for alle løsninger av

$$y'' + 4y' + ky = 0.$$

A: $k > 4$ $\boxed{\textbf{B: } k > 0}$ **C:** $k \neq 0$ **D:** $4 \geq k \geq 0$

Løsning: Karakteristisk ligning blir $\lambda^2 + 4\lambda + k = 0$ det vil si $\lambda = -2 \pm \sqrt{4 - k}$. Hvis $k > 4$ blir løsningen til differensialligningen på formen

$$y(x) = e^{-2x}(A \cos \omega x + B \sin \omega x),$$

der $\omega = \sqrt{k - 4}$. Alle løsninger oppfyller $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$. Hvis $k = 4$ får vi

$$y(x) = e^{-2x}(Ax + B),$$

som også oppfyller $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$. For $k < 4$ får vi

$$y(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x},$$

der $\lambda_1 = -2 + \sqrt{4 - k}$ og $\lambda_2 = -2 - \sqrt{4 - k}$. Her blir alltid $\lambda_2 < 0$, så $\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$ bare hvis $\lambda_1 < 0$, det vil si $k > 0$ (alternativ **B**).

Oppgave 8 Hvilke betingelser må konstantene a og b tilfredstille for at det inhomogene ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y - \ \ 3z &= 1 \\ 2x + \ \ y + 3az &= 2 \\ 2x + \qquad\ \ 2z &= b \end{aligned}$$

skal ha *uendelig mange* løsninger?

A: $a \neq 0, b$ vilkårlig **B:** $a = 0, b \neq 2$ **C:** a vilkårlig, $b = 2$ $\boxed{\textbf{D:}\ a = 0, b = 2}$

Løsning: Totalmatrisen (augmented coefficient matrix) til det inhomogene ligningssystemet er

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3a & 2 \\ 2 & 0 & 2 & b \end{array}\right].$$

Vi utfører så Gauss eliminasjon på denne:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3a & 2 \\ 2 & 0 & 2 & b \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_1+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3a & 2 \\ 0 & -4 & 8 & b-2 \end{array}\right] \xrightarrow{-2R_1+R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 3(a+2) & 0 \\ 0 & -4 & 8 & b-2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -a-2 & 0 \\ 0 & -4 & 8 & b-2 \end{array}\right] \xrightarrow{4R_2+R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -a-2 & 0 \\ 0 & 0 & -4a & b-2 \end{array}\right]$$

Utfra echelonmatrisen leser vi at vi har *uendelig mange* løsninger dersom $a = 0, b = 2$ (alternativ **D**).

Oppgave 9 Hva er redusert echelonform (trappeform) for matrisen

$$\begin{bmatrix} 6 & -1 & -6 & -1 & 3 \\ -6 & 1 & 6 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}?$$

A: $\begin{bmatrix} 1 & -1/6 & -1 & -1/6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{B}}$ **:** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

C: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **D:** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Løsning: Elementære radoperasjoner (og tunga rett i munnen) gir alternativ **B**.

Oppgave 10 Gitt at $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. For hvilke $B = \begin{bmatrix} z & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$ gjelder at $AB = BA$?

A: Alle B **B:** Alle B der $x = 0$ og $z = 1$

C: Alle B der $x \neq 0$ og $y = -z$ $\boxed{\textbf{D:}\ \text{Alle } B \text{ der } x = y + z = 0}$

Løsning:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & x \\ y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & x \\ z+2y & x \end{bmatrix}$$
$$BA = \begin{bmatrix} z & x \\ y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z+x & 2x \\ y & 0 \end{bmatrix}$$

Ser da at $AB = BA \iff x = y + z = 0$ (alternativ **D**).