TMA4115 MATEMATIKK 3

Semesterprøve fredag 7. mars 2008

Løsningsforslag

Oppgave 1 Bestem imaginærdelen til det komplekse tallet

$$z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3.$$

$\boxed{\textbf{A:}\quad -1}$ **B:** 1 **C:** -2 **D:** 2

Vi har

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i, \qquad \text{og følgelig} \qquad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 = i^3 = -i.$$

Oppgave 2 Avgjør om det fins et helt tall $n > 0$ slik at $(\sqrt{3}+i)^n$ er et reelt tall, og bestem i så fall det minste slike tallet n.

A: ingen n **B:** $n = 3$ $\boxed{\textbf{C:}\quad n = 6}$ **D:** $n = 12$

På polarform er $\sqrt{3}+i = 2e^{i\pi/6}$. Da er $(\sqrt{3}+i)^n = 2^n e^{in\pi/6} = 2^n\big(\cos(n\pi/6) + i\sin(n\pi/6)\big)$. Skal $(\sqrt{3}+i)^n$ være et reelt tall, må vi ha $\sin(n\pi/6) = 0$. Da må $n\pi/6$ være et heltallig multiplum av π. Det minste positive tallet n som oppfyller dette er $n = 6$.

Oppgave 3 Hva er $y(0)$ til løsningen på initialverdiproblemet

$$2y'' + 18y = 12y', \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0\,?$$

A: e^3 **B:** $4e^2$ **C:** 1 $\boxed{\textbf{D:}\quad 4e^{-3}}$

På standardform har vi $y'' - 6y' + 9y = 0$. Karakteristisk ligning er $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0$ som gir generell løsning $y(x) = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$. Da er $y'(x) = 3c_1e^{3x} + c_2e^{3x} + 3c_2xe^{3x}$, og av initialbetingelsene får vi

$$y(1) = c_1e^3 + c_2e^3 = 1$$
$$y'(1) = 3c_1e^3 + 4c_2e^3 = 0.$$

Det gir $c_1 = 4e^{-3}$ og $c_2 = -3e^{-3}$. Følgelig er $y(x) = 4e^{3x-3} - 3xe^{3x-3}$ og $y(0) = 4e^{-3}$.

Oppgave 4 Euler-Cauchyligningen

$$x^2y'' - 3xy' = 0$$

har en basis $\{y_1, y_2\}$ på formen $y_1 = x^{m_1}$ og $y_2 = x^{m_2}$ der $m_1 < m_2$. Hva blir Wronskideterminanten $W(y_1, y_2)$?

$\boxed{\textbf{A:}\quad 4x^3}$ **B:** $5x^4$ **C:** $3x^2$ **D:** $4x^{-1}$

Setter vi inn $y = x^m$, får vi hjelpeligningen $m^2 - 4m = 0$ som har løsningene $m_1 = 0$ og $m_2 = 4$ (der $m_1 < m_2$). Følgelig er $y_1 = x^0 = 1$ og $y_2 = x^4$ og $W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = 4x^3$.

Oppgave 5 Et masse–fjærsystem har bevegelsesligning

$$my'' + 4y' + 4y = 0.$$

For hvilke verdier av m vil systemet være underdempet?

A: $m > 1/4$ **B:** $m < 1$ **C:** $m \geq 1$ $\boxed{\textbf{D:}\quad m > 1}$

Systemet er underdempet når den karakteristiske ligningen $m\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ har komplekse røtter. Røttene er $\lambda = \left(-4 \pm \sqrt{16 - 16m}\right)/2m$ så vi får underdempning når $16 - 16m < 0$, dvs. når $m > 1$.

Oppgave 6 Anta at p og q er funksjoner som er slik at $y = c_1 + c_2 \cos x$ er en generell løsning av ligningen $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Hvilket av alternativene er da en partikulær løsning av den inhomogene ligningen

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \sin x\,?$$

A: $x \sin x + x$ $\boxed{\textbf{B:}\quad \sin x - x\cos x}$ **C:** $1 + \sin x$ **D:** $1 + \cos x$

Vi kan bruke metoden med variasjon av parametre for å finne y_p. Her er $y_1 = 1$ og $y_2 = \cos x$ og følgelig $W = W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = -\sin x$. Det gir

$$y_p = -y_1 \int \frac{y_2 r}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W} dx = \int \frac{\cos x \sin x}{\sin x} dx - \cos x \int \frac{\sin x}{\sin x} dx = \sin x - x\cos x.$$

Oppgave 7 Hva er redusert echelonform for matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}?$$

$\boxed{\textbf{A:} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$ **B:** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **C:** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **D:** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Ved å bruke elementære radoperasjoner får vi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{SWAP}(R_2,R_3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[(\frac{1}{2})R_3]{(-1)R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(2)R_3+R_2]{(-3)R_3+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 8 Gitt $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ der $b \neq 0$. For hvilke $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$ gjelder $AD = DA$?

A: alle D $\boxed{\textbf{B: }\text{alle } D \text{ der } d_2 = d_1}$ **C:** alle D der $d_2 = \pm d_1$ **D:** bare $D = \mathit{0}$ og $D = I$

Vi har

$$AD = \begin{bmatrix} ad_1 & bd_2 \\ 0 & cd_2 \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad DA = \begin{bmatrix} d_1 a & d_1 b \\ 0 & d_2 c \end{bmatrix}.$$

Følgelig er $AD = DA$ hvis og bare hvis $bd_2 = d_1 b$, dvs. hvis og bare hvis $d_2 = d_1$ siden $b \neq 0$.

Oppgave 9 Hvis

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -7 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

hva er da determinanten til A^{-1}?

A: 6 **B:** 4 $\boxed{\textbf{C:}\ \ 1/6}$ **D:** 1/4

Ved å kofaktorutvikle langs første rad får vi

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} -7 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-7+8) - 5(3-4) - (-6+7) = 6.$$

Da blir $\det(A^{-1}) = 1/\det(A) = 1/6$.

Oppgave 10 Hvilke(t) utsagn er generelt riktig for (reelle) 2×2–matriser

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}?$$

(1) Hvis elementene på hoveddiagonalen er 1 ($a_{11} = a_{22} = 1$), så er A inverterbar.

(2) Elementene a_{11}, a_{12}, a_{21} og a_{22} kan velges slik at $\det(A^T A) = -1$.

$\boxed{\textbf{A:}\ \ \text{verken (1) eller (2)}}$ **B:** bare (1) **C:** bare (2) **D:** både (1) og (2)

I 2×2-matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

er $a_{11} = a_{22} = 1$, men A er ikke inverterbar siden $\det(A) = 0$. Utsagnet (1) er altså ikke riktig.

Generelt gjelder $\det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)\det(A) = \big(\det(A)\big)^2 \geq 0$. Følgelig kan ikke $\det(A^T A)$ bli negativ uansett hva a_{11}, a_{12}, a_{21} og a_{22} er, og (2) er heller ikke riktig.