TMA4110
Matematikk 3
Høst 2010

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag — Øving 4

Fra Kreyszig (9. utgave) avsnitt 2.7

$\boxed{3}$ Vi skal løse ligningen (1) $y'' - 16y = 19.2e^{4x} + 60e^x$. Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 - 16 = 0$ har røtter $\lambda = \pm 4$. Generell løsning av den homogene ligningen er da

$$y_h = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x}.$$

En partikulær løsning y_p av (1) kan vi finne ved hjelp av ubestemte koeffisienters metode. Vi bruker regelen om at y_p blir en sum tilsvarende leddene i $r(x) = 19.2e^{4x} + 60e^x$, og vi bruker modifikasjonsregelen på det første leddet i y_p siden e^{4x} er en løsning i den homogene ligningen. Formen på y_p blir dermed

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} = xAe^{4x} + Be^x.$$

Derivasjon gir $y_p' = (A + 4Ax)e^{4x} + Be^x$ og $y_p'' = (8A + 16Ax)e^{4x} + Be^x$. Innsatt i (1):

$$8Ae^{4x} - 15Be^x = 19.2e^{4x} + 60e^x \quad \Longleftrightarrow \quad A = 2.4,\; B = -4.$$

Generell løsning av (1) blir da

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x} + 2.4xe^{4x} - 4e^x.$$

$\boxed{19}$ Vi skal løse ligningen (1) $y'' - y' - 12y = 144x^3 + 12.5$ med initialbetingelsene $y(0) = 5$ og $y'(0) = -0.5$. Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$ har røtter $\lambda_1 = -3$ og $\lambda_2 = 4$. Det gir

$$y_h = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{4x}$$

som løsning av den homogene differensialligningen.

For å finne en partikulær løsning y_p av (1), bruker vi ubestemte koeffisienters metode. Ifølge hovedregelen (basic rule) er y_p på formen

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

Da er $y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C$ og $y_p'' = 6Ax + 2B$. Innsatt i (1) får vi

$$-12Ax^3 + (-3A - 12B)x^2 + (6A - 2B - 12C)x + (2B - C - 12D) = 144x^3 + 12.5.$$

Sammenligner vi koeffisientene for hver potens av x, får vi ligningssystemet

$$\begin{aligned}
[x^3]:& \quad -12A = 144 \\
[x^2]:& \quad -3A - 12B = 0 \\
[x]:& \quad 6A - 2B - 12C = 0 \\
[x^0]:& \quad 2B - C - 12D = 12.5
\end{aligned}$$

med løsning (ovenfra og nedover) $A = -12$, $B = 3$, $C = -6.5$ og $D = 0$. Den generelle løsningen av (1) blir dermed

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{4x} - 12x^3 + 3x^2 - 6.5x\,.$$

Så tilpasser vi løsningen til initialbetingelsene:

$$\begin{aligned} 5 = y(0) &= c_1 + c_2 \\ -0.5 = y'(0) &= -3c_1 + 4c_2 - 6.5 \end{aligned} \qquad \text{dvs.} \qquad \begin{aligned} c_1 + c_2 &= 5 \\ -3c_1 + 4c_2 &= 6. \end{aligned}$$

Det gir $c_1 = 2$ og $c_2 = 3$, og løsningen av initialverdiproblemet blir

$$y = 2e^{-3x} + 3e^{4x} - 12x^3 + 3x^2 - 6.5x\,.$$

Fra Kreyszig (9. utgave) avsnitt 2.10

$\boxed{1}$ Vi skal løse ligningen (1) $y'' + y = 1/\sin x$. Den karakteristiske ligningen $\lambda^2 + 1 = 0$ har røtter $\lambda = \pm i$. Generell løsning av den homogene ligningen er da

$$y_h = Ay_1 + By_2 = A\cos x + B\sin x.$$

Vi bruker metoden med variasjon av parametre til å finne en partikulær løsning av (1) på formen $y_p = uy_1 + vy_2$. Her er Wronskideterminanten $W = y_1y_2' - y_2y_1' = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, og høyresiden i (1) (som er på standardform) er $r(x) = 1/\sin x$. Da får vi

$$\begin{aligned} y_p &= -y_1 \int \frac{y_2 r}{W}\,dx + y_2 \int \frac{y_1 r}{W}\,dx \\ &= -\cos x \int dx + \sin x \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = -x\cos x + (\sin x)\ln|\sin x|. \end{aligned}$$

Alternativt: u' og v' skal tilfredsstille ligningssystemet

$$\begin{aligned} u'y_1 + v'y_2 &= 0 \\ u'y_1' + v'y_2' &= r \end{aligned} \qquad \text{dvs.} \qquad \begin{aligned} u'\cos x + v'\sin x &= 0 \\ -u'\sin x + v'\cos x &= 1/\sin x\,. \end{aligned}$$

Det gir $u' = -1$ og $v' = (\cos x)/\sin x$. Ved integrasjon følger $u = -x$ og $v = \ln|\sin x|$, og dermed blir $y_p = u\cos x + v\sin x = -x\cos x + (\sin x)\ln|\sin x|$ som ovenfor. (NB: Vi tar ikke med integrasjonskonstanter når vi regner ut y_p.)

Generell løsning av (1) blir altså

$$y = y_h + y_p = A\cos x + B\sin x - x\cos x + \sin x \ln|\sin x|.$$

$\boxed{4}$ Vi skal løse ligningen

$$(1) \qquad y'' - 2y' + y = e^x \sin x$$

ved variasjon av parametere. Den karakteristiske ligningen til den tilhørende homogene ligningen er

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4}}{2} = 1,$$

så $\{e^x, xe^x\}$ er en basis for løsninger av den tilhørende homogene ligningen. Vi regner ut Wronskideterminanten

$$\begin{aligned} W(e^x, xe^x) &= e^x(xe^x)' - xe^x(e^x)' \\ &= e^x\left(e^x + xe^x\right) - e^x xe^x = e^{2x} \end{aligned}$$

Vi setter så inn $W = e^{2x}$ og $r = e^x \sin x$ i formelen for partikulærløsningen, som gir

$$\begin{aligned} y_p &= -e^x \int \frac{xe^x e^x \sin x}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x + xe^x \int \frac{e^x e^x \sin x}{e^{2x}}\,\mathrm{d}x \\ &= -e^x \int x \sin x \,\mathrm{d}x + xe^x \int \sin x \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Det andre integralet er uproblematisk; det første integralet kan håndteres ved delvis integrasjon

$$\int x \sin x \,\mathrm{d}x = -x \cos x + \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x - x \cos x + C$$

og partikulærløsningen er dermed gitt ved

$$y_p(x) = -e^x(\sin x - x \cos x) - xe^x \cos x = -e^x \sin x$$

Merk at integrasjonskonstanter kan ignoreres her (hvorfor?). Dermed er generell løsning av (1) gitt ved

$$y = y_h + y_p = e^x\left(c_1 + c_2 x - \sin x\right)$$

Fra Kreyszig (9. utgave) avsnitt 2.R (repetisjonsspørsmål og oppgaver s. 102)

$\boxed{26}$ Vi har ligningen $my'' + cy' + ky = r(t)$ for utslaget y (se Kreyszig 2.8). Med $m = 4$, $c = 4$, $k = 17$ og $r(t) = 202 \cos 3t$, får vi

$$4y'' + 4y' + 17y = 202 \cos 3t.$$

Oppgaven spør etter stasjonær løsning, dvs. tilstanden til systemet etter at lang tid har gått. Denne tilstanden er gitt av bidraget fra partikulærløsningen y_p. (Løsningen av den homogene ligningen går mot null når $t \to \infty$, se Kreyszig 2.4, dempet system).

For å finne y_p, bruker vi ubestemte koeffisienters metode med $y_p = K \cos 3t + M \sin 3t$. Innsatt i ligningen får vi

$$(-19K + 12M) \cos 3t + (-12K - 19M) \sin 3t = 202 \cos 3t.$$

Sammenligner vi koeffisientene på begge sider av likhetstegnet, får vi ligningene

$$\begin{array}{ll} -19K + 12M = 202 & [\cos 3t] \\ -12K - 19M = 0 & [\sin 3t] \end{array}$$

med løsning

$$K = -\frac{38}{5} \quad \text{og} \quad M = \frac{24}{5}.$$

Stasjonær løsning blir da

$$y_p(t) = -\tfrac{38}{5} \cos 3t + \tfrac{24}{5} \sin 3t.$$

27 Bevegelsesligningen for masse/fjær-systemet er her

(1) $0.25y'' + y = 15\cos 0.5t - 7\sin 1.5t$ dvs. $y'' + 4y = 60\cos 0.5t - 28\sin 1.5t$

med startbetingelser $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Den homogene ligningen $y'' + 4y = 0$ har generell løsning $y_h = A\cos 2t + B\sin 2t$. En partikulærløsning av (1) har formen $y_p = (K_1\cos 0.5t + M_1\sin 0.5t) + (K_2\cos 1.5t + M_2\sin 1.5t)$, og ved innsetting i (1) får vi

$$3.75(K_1\cos 0.5t + M_1\sin 0.5t) + 1.75(K_2\cos 1.5t + M_2\sin 1.5t) = 60\cos 0.5t - 28\sin 1.5t,$$

og dermed $K_1 = 16$, $M_1 = 0$, $K_2 = 0$ og $M_2 = -16$. Generell løsning av (1) er følgelig

$$y = y_h + y_p = A\cos 2t + B\sin 2t + 16(\cos 0.5t - \sin 1.5t).$$

Da er $y' = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t - 8\sin 0.5t - 24\cos 1.5t$, og til bestemmelse av A og B har vi

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = A + 16 \\ 0 &= y'(0) = 2B - 24 \end{aligned}$$

som gir $A = -16$ og $B = 12$. Løsningen blir altså

$$y = -16\cos 2t + 12\sin 2t + 16(\cos 0.5t - \sin 1.5t).$$

De to siste leddene skyldes den påtrykte kraften. For de to første leddene (dvs. for det frie systemet) er $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 2$. Følgelig ville vi fått resonans dersom den påtrykte kraften hadde hatt frekvens $\omega/(2\pi) = 2/(2\pi) = 1/\pi \approx 0.32$ Hz.

Eksamensoppgaver (`www.math.ntnu.no/emner/TMA4110/2010h/eksamen/xoppg.pdf`)

A-14 Den gitte differensialligningen

(1) $$y'' - (a+b)y' + aby = 0$$

har karakteristisk ligning

$$\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab = 0.$$

Siden $\lambda^2 - (a+b)\lambda + ab = (\lambda - a)(\lambda - b)$ er røttene $\lambda_1 = a$ og $\lambda_2 = b$. Vi kunne også brukt formel for å finne λ_1 og λ_2:

$$\lambda = \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab}}{2} = \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a-b)^2}}{2} = \frac{(a+b) \pm (a-b)}{2}, \qquad \begin{aligned}\lambda_1 &= a \\ \lambda_2 &= b\end{aligned}$$

Generell løsning av (1) blir da

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{ax} + C_2e^{bx} && \text{når } a \neq b, \\ y &= C_1e^{ax} + C_2xe^{ax} && \text{når } a = b. \end{aligned}$$

For den inhomogene differensialligningen

(2) $$y'' - 2ay' + a^2y = e^{ax}$$

er følgelig $y_h = C_1e^{ax} + C_2xe^{ax}$. Siden den karakteristiske ligningen har dobbelrot $\lambda_1 = \lambda_2 = a$ er en partikulær løsning av formen $y_p = x^2 \cdot Ae^{ax}$. Innsetting i (2) gir $A = \frac{1}{2}$, og generell løsning av (2) blir

$$y = y_h + y_p = C_1e^{ax} + C_2xe^{ax} + \frac{1}{2}x^2e^{ax}.$$

Flervalgsoppgave

$\boxed{1}$ Basis for løsning av $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ er $y_1 = 1$ og $y_2 = \cos x$. Vi bruker metoden med variasjon av parametre. Vi regner ut Wronskideterminanten

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = 1 \cdot (\cos x)' - (\cos x) \cdot 0 = -\sin x$$

Partikulær løsning er

$$y_p = -y_1 \int \frac{r y_2}{W(y_1, y_2)} dx + y_2 \int \frac{r y_1}{W(y_1, y_2)} dx$$

$$= -1 \int \frac{\sin x \cos x}{-\sin x} dx + \cos x \int \frac{\sin x}{-\sin x} dx$$

$$= \int \cos x dx - \cos x \int 1 dx$$

$$= \sin x - x \cos x$$

Dvs løsningsalternativ B er det riktige.

Alternativ løsning: Vi setter inn $y_1 = 1$, $y_1' = 0$ og $y_1'' = 0$ inn i den homogene likningen og får $q(x) = 0$. Deretter setter vi inn $y_2 = \cos x$, $y_2' = -\sin x$ og $y_2'' = -\cos x$ inn i den homogene likningen og finner $p(x) = -\frac{\cos x}{\sin x} = -\cot x$. Det vil si at den inhomogene likningen som har generell løsning $c_1 + c_2 \cos x$ er

$$y'' - (\cot x)y' = \sin x.$$

Denne kan løses ved å sette

$$y_p = u y_1 + v y_2 = u + v \cos x$$

og

$$0 = u' y_1 + v' y_2 = u' + v' \cos x.$$

Vi regner ut y_p' og y_p'':

$$y_p' = u' + v' \cos x - v \sin x = -v \sin x.$$

$$y_p'' = -v' \sin x - v \cos x$$

og setter inn i den inhomogene likningen.

$$-v' \sin x - v \cos x + (\cot x) v \sin x = \sin x.$$

Bruker så at $\cot x \sin x = \cos x$:

$$-v' = 1$$

, og vi har $v = -x$. Setter så inn $v' = -1$ inn i $0 = u' + v' \cos x = 0$:

$$0 = u' - \cos x$$

Vi løser denne og får $u = \sin x$. $y_p = \sin x - x \cos x$. Det vil si at B er riktig svar.