Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 12 – Veiledning uke 46

Fra Edwards & Penney, avsnitt 6.1

EGENVERDIER OG EGENVEKTORER Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorene for de oppgitte matrisene. Finn en basis for hvert egenrom av dimensjon 2 eller større.

$\boxed{22}$ $\begin{bmatrix} 5 & -6 & 3 \\ 6 & -7 & 3 \\ 6 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$ $\boxed{26}$ $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$

$\boxed{29}$ **a)** Anta at A er en kvadratisk matrise. Bruk den karakteristiske ligningen for å vise at A og A^T har de samme egenverdiene.

b) Gi et eksempel på en 2×2-matrise A slik at A og A^T ikke har samme egenvektorer.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 6.2

DIAGONALISERBARE MATRISER Avgjør om den oppgitte matrisen A er diagonaliserbar. I så tilfelle, finn en matrise P og en diagonalmatrise D slik at $P^{-1}AP = D$.

$\boxed{15}$ $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\boxed{26}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{32}$ Vis at dersom A og B er similære $n \times n$-matriser, så har de samme karakteristiske ligning og dermed de samme egenverdiene.

Fra Edwards & Penney, avsnitt 6.3

POTENSER AV MATRISER En matrise A er oppgitt. Bruk metoden i eksempel 1 for å beregne A^5.

$\boxed{7}$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

28 Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

er ikke diagonaliserbar. (Hvorfor ikke?) Skriv $A = I + B$ for en matrise B. Vis at $B^2 = 0$ og dermed at

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

29 Betrakt den stokastiske matrisen

$$A = \begin{bmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{bmatrix}$$

der $0 < p < 1$ og $0 < q < 1$. Vis at egenverdiene til A er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = p + q - 1$, slik at $|\lambda_2| < 1$.

Eksamensoppgaver

`http://www.math.ntnu.no/emner/TMA4110/2010/eksoppg/xoppg.pdf`

A-51 La A være en kvadratisk matrise som oppfyller betingelsen

$$A^2 - 3A + 2I = \mathit{0}$$

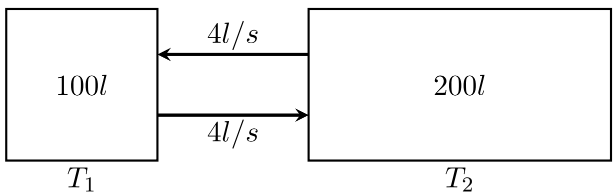
hvor I er identitetsmatrisen, og $\mathit{0}$ er nullmatrisen. Begrunn at da er A inverterbar (invertibel), og finn A^{-1} uttrykt ved A og I.

Aug. 2002, oppg. 6 **a)** Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Hvilke egenverdier og egenvektorer har matrisen kA, dersom $k \neq 0$ er en konstant?

b)



Ved tidspunktet $t = 0$ inneholder tank T_1 100 liter rent vann, og tank T_2 inneholder 200 liter vann med 30 kg salt oppløst. Saltløsningen strømmer mellom tankene med en fart på 4 liter pr. sekund. Finn saltmengdene $x_1(t)$ og $x_2(t)$ i de to tankene for alle $t > 0$.

Fasit

EP 6.2

15. $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

EP 6.3

7. $\begin{bmatrix} 1 & 93 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}.$

Eksamensoppgaver

A-51 $A^{-1} = \frac{3}{2}I - \frac{1}{2}A$