Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Løysingsforslag – Øving 1

Oppgåver frå læreboka, s. xviii

$\boxed{8}$

$$r = |-5i| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$$
$$\theta = \mathrm{Arg}(-5i) = -\frac{\pi}{2}$$

$\boxed{12}$

$$r = |3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$
$$\theta = \mathrm{Arg}(3 - 4i) = \tan^{-1}\frac{-4}{3}$$

$\boxed{14}$

$$r = |-\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{3 + (-3)^2} = \sqrt{12}$$
$$\theta = \mathrm{Arg}(-\sqrt{3} - 3i) = -\pi + \tan^{-1}\frac{-3}{-\sqrt{3}} = -\frac{2\pi}{3}$$

(Me legg til $-\pi$ når $\mathrm{Re}(z) < 0$ og $\mathrm{Im}(z) < 0$.)

$\boxed{16}$ Me har $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$. Sidan $-\pi < \mathrm{Arg}(zw) \leq \pi$ må me trekkja frå 2π:

$$\mathrm{Arg}(zw) = \frac{5\pi}{4} - 2\pi = -\frac{3\pi}{4}$$

$\boxed{21}$

$$z = |z| \cdot (\cos(\arg(z)) + i \cdot \sin(\arg(z))) = \pi(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} + \frac{\pi}{2}i$$

$\boxed{22}$

$$z = 0$$

$\boxed{25}$

$$\overline{-3 - 5i} = -3 + 5i$$

$\boxed{30}$ Lat $z = x + iy$ der x og y er reelle tal. Då får me

$$|z - 2i| \leq 3$$
$$|x + (y - 2)i| \leq 3$$
$$\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} \leq 3$$

$$x^2 + (y-2)^2 \leq 3^2$$

Denne ulikheita beskriv ein lukka disk med radius 3 og sentrum i $(0,2)$, altså $2i$.

$\boxed{41}$

$$\frac{1+3i}{2-i} = \frac{(1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$$

$\boxed{42}$

$$\frac{1+i}{i(2+3i)} = \frac{1+i}{-3+2i} = \frac{(1+i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)} = -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i$$

$\boxed{49}$ (a)

$$\overline{z} = \frac{2}{z}$$
$$\overline{z}z = 2$$
$$|z|^2 = 2$$

($w\overline{w} = |w|^2$ for alle komplekse tal w. Sjå s xiii-xiv)

Løysingane utgjer ein sirkel i det komplekse planet, med radius $\sqrt{2}$ og sentrum i 0.

(b)

$$\overline{z} = -\frac{2}{z}$$
$$|z|^2 = -2$$

Dette er umuleg, sidan venstresida er positiv. Altså har likninga ingen løysingar.

$\boxed{53}$ Me har $|-1+i| = \sqrt{2}$ og $\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$. Kubikkrøtene vert då

$$z_1 = 2^{\frac{1}{6}}(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}) = 2^{-\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}i$$

$$z_2 = 2^{\frac{1}{6}}(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})) = 2^{\frac{1}{6}}\cos\frac{11\pi}{12} + i \cdot 2^{\frac{1}{6}}\sin\frac{11\pi}{12}$$

$$z_3 = 2^{\frac{1}{6}}(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3})) = 2^{\frac{1}{6}}\cos\frac{19\pi}{12} + i \cdot 2^{\frac{1}{6}}\sin\frac{19\pi}{12}$$

Oppgåver frå læreboka, s. xxvii

$\boxed{2}$ D består av alle $z = x + iy$ som er slik at $x + y = 1$. R består då av alle $w = u + iv$ som er slik at $w = \overline{z} = x - iy = x + i(x-1)$, altså alle punkt på linja $v = u - 1$.

(Merk at R er eit spegelbilete av D. Komplekskonjugering er det same som spegling om den reelle aksen.)

$\boxed{7}$ D består av alle z med $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}$. R består då av alle w med

$$\arg(w) = \arg(\sqrt{z}) = \frac{\arg(z)}{2} = -\frac{\pi}{6}$$

$\boxed{28}$

$$z^2 - 2z + i = 0$$

$$z = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4i}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-i} = 1 \pm 2^{\frac{1}{4}}(\cos -\frac{\pi}{8} + i \cdot \sin -\frac{\pi}{8})$$

$$z_1 = 1 + 2^{\frac{1}{4}}(\cos -\frac{\pi}{8} + i \cdot \sin -\frac{\pi}{8})$$

$$z_2 = 1 - 2^{\frac{1}{4}}(\cos -\frac{\pi}{8} + i \cdot \sin -\frac{\pi}{8})$$

$\boxed{32}$ Lat $w = z^2$.

$$z^4 - 2z^2 + 4 = 0$$

$$w^2 - 2w + 4 = 0$$

$$w = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4^2}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{-12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$w_1 = 1 + \sqrt{3}i$$

$$w_2 = 1 - \sqrt{3}i$$

$$z_1 = \sqrt{w_1} = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}i$$

$$z_2 = -\sqrt{w_1} = -\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{2}i$$

$$z_3 = \sqrt{w_2} = \sqrt{2}(\cos -\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin -\frac{\pi}{6}) = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{2}i$$

$$z_4 = -\sqrt{w_2} = -\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2}i$$

Eksamensoppgåve

$\boxed{1}$ Me skal finna alle komplekse tal z slik at $\text{Im}(-z+i) = (z+i)^2$. Lat $z = x + iy$. Då vert likninga

$$-y + 1 = (x + (y+1)i)^2 = x^2 + 2x(y+1)i - (y+1)^2$$

Me deler likninga i ein reell og ein imaginær del:

$$(1) \qquad -y + 1 = x^2 - (y+1)^2$$

$$(2) \qquad 0 = 2x(y+1)i$$

Anta først at $x \neq 0$. Likning (2) gir då

$$(y+1) = 0 \Rightarrow y = -1.$$

Me set dette inn i likning (1) og får

$$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Altså er $z_1 = \sqrt{2} - i$ og $z_2 = -\sqrt{2} - i$ løysingar.

Anta så at $x = 0$. Då gir likning (1)

$$-y + 1 = -(y + 1)^2$$
$$y^2 + y + 2 = 0.$$

Denne har ingen reelle løysingar, altså kan me ikkje ha $x = 0$. Dermed er z_1 og z_2 dei einaste løysingane.