Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4110
Matematikk 3
Haust 2011

Løysingsforslag – Øving 2

Oppgåver frå læreboka, s. xliv-xlv

9 Me finn først fjørkonstanten k. Når systemet er i likevekt er fjøra strekt 50 cm, så me får likninga

$$mg = k \cdot 0{,}5 \Rightarrow k = \frac{2 \cdot 9{,}8}{0{,}5} = 39{,}2$$

Lat y vera avstanden frå loddet til likevektspunktet (positiv retning nedover). Sidan me ikkje har nokon demping eller ytre kraft vert likninga for systemet

$$my'' + ky = 0 \Rightarrow 2y'' + 39{,}2y = 0.$$

Me startar med å dra loddet 12 cm nedover og sleppa det (utan å gi det nokon ekstra fart), så initialvilkåra vert

$$y(0) = 0{,}12$$
$$y'(0) = 0$$

11 Den ytre krafta varierer harmonisk, dvs. som ei sinuskurve. Sidan den i $t = 0$ har fullt utslag oppover, og $\cos x$ har eit maksimum i $x = 0$, brukar me cosinus i staden for sinus. Vidare har me framleis positiv retning nedover, så då vert formelen for den ytre krafta

$$F(t) = -A\cos\frac{2\pi}{T}t = -0{,}5\cos\pi t.$$

Likninga for systemet vert då

$$my'' - R(v) + ky = F(t)$$

$$my'' + 0{,}05y' + ky = -0{,}5\cos\pi t$$

Initialvilkåra er dei same som i oppgåve 9.

17 Sjekk først at y_1 og y_2 er løysingar. Merk så at $\frac{y_1(t)}{y_2(t)} = \frac{e^{-t}}{e^{2t}} = e^{-3t}$. Viss y_1 og y_2 hadde vore lineært avhengige ville dette vore ein konstant, og det er det ikkje. Altså er dei lineært uavhengige.

Me reknar så ut Wronski-determinanten:

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} = 3e^{t} \neq 0$$

Her ser me igjen at y_1 og y_2 er lineært uavhengige.

$\boxed{25}$ Sjekk først at y_1 og y_2 er løysingar. Me har $\frac{y_2(t)}{y_1(t)} = \frac{te^{-4t}}{e^{-4t}} = t$. Dette er ikkje ein konstant, så y_1 og y_2 er lineært uavhengige. Altså vert den generelle løysinga

$$y(t) = C_1e^{-4t} + C_2te^{-4t}$$

der C_1 og C_2 er konstantar.

Vidare har me

$$y(0) = 2$$
$$C_1e^0 + C_2 \cdot 0 \cdot e^0 = 2$$
$$C_1 = 2$$

og

$$y'(t) = -4C_1e^{-4t} + C_2(e^{-4t} - 4te^{-4t}) = e^{-4t}(-4C_1 + C_2 - 4C_2t$$
$$-1 = y'(0) = e^0(-4C_1 + C_2 - 0) = -8 + C_2$$
$$C_2 = 7$$

Dermed vert løysinga

$$y(t) = 2e^{-4t} + 7te^{-4t}$$

$\boxed{26}$ a)

$$t^2y_1''(t) + ty_1'(t) - 4y_1(t) = 2t^2 + 2t^2 - 4t^2 = 0,$$

altså er y_1 ei løysing.

b) Lat $y_2(t) = t^2v(t)$. Dette gir $y_2'(t) = t^2v'(t) + 2tv(t)$ og $y_2''(t) = t^2v''(t) + 4tv'(t) + 2v(t)$ Me set dette inn i likning (1.32):

$$t^2(t^2v''(t) + 4tv'(t) + 2v(t)) + t(t^2v'(t) + 2tv(t)) - 4t^2v(t) = 0$$

$$t^4v''(t) + 5t^3v'(t) = 0$$
$$tv''(t) + 5v'(t) = 0.$$

Me løyser denne separable likninga for v'.

$$t\frac{dv'}{dt} + 5v' = 0$$

$$\int \frac{1}{v'}dv' = \int -\frac{5}{t}dt$$

$$\ln v' = -5\ln t$$

$$v' = t^{-5}$$

Dermed får me $v = \int t^{-5}dt = -\frac{1}{4}t^{-4}$ og $y_2 = -\frac{1}{4}t^{-2}$. Altså kan den generelle løysinga skrivast som $y = C_1t^2 + C_2 \cdot (-\frac{1}{4})t^{-2}$, men av kosmetiske årsaker innfører me ein ny konstant $C_3 = -\frac{1}{4}C_2$, slik at løysinga vert

$$y = C_1t^2 + C_3t^{-2}.$$

$\boxed{29}$ Sjekk først at y_1 er ei løysing.

Lat $y_2(t) = v(t)y_1(t) = tv(t)$. Det gir $y_2'(t) = v(t) + tv'(t)$ og $y_2''(t) = 2v'(t) + tv''(t)$. Dermed får me

$$t^2(2v'(t) + tv''(t)) - 3t(v(t) + tv'(t)) + 3tv(t) = 0$$

$$t^3v''(t) - t^2v'(t) = 0$$

$$tv''(t) - v'(t) = 0$$

$$\int \frac{1}{v'}dv' = \int \frac{1}{t}dt$$

$$\ln v' = \ln t$$

$$v' = t$$

$$v = \frac{1}{2}t^2.$$

Dermed vert $y_2(t) = \frac{1}{2}t^3$ (hugs å sjekka at y_2 er ei løysing og at y_1 og y_2 er lineært uavhengige), og den generelle løysinga vert

$$y(t) = C_1t + C_2t^3.$$

Oppgåver frå læreboka, s. lv

$\boxed{14}$ Den karakteristiske likninga er

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

og har røtene $\lambda = -1 \pm \sqrt{2}i$. Det følgjer då av Proposisjon 3.11 at den generelle løysinga vert

$$y(t) = e^{-t}(C_1 \cos \sqrt{2}t + C_2 \sin \sqrt{2}t).$$

$\boxed{27}$ Me finn først den generelle løysinga av likninga. Den karakteristiske likninga er

$$\lambda^2 - 2\lambda + 17 = 0$$

og har røtene $\lambda = 1 \pm 4i$. Det følgjer då av Proposisjon 3.11 at den generelle løysinga vert

$$y(t) = e^t(C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t).$$

Vidare har me

$$-2 = y(0) = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = C_1$$

og

$$y'(t) = e^t(C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t - 4C_1 \sin 4t + 4C_2 \cos 4t)$$

$$3 = y'(0) = C_1 + 4C_2 = 4C_2 - 2$$

$$C_2 = \frac{5}{4}$$

så løysinga vert

$$y(t) = e^t(-2 \cos 4t + \frac{5}{4} \sin 4t).$$

29 Me finn først den generelle løysinga av likninga. Den karakteristiske likninga er

$$\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0$$

og har ei gjentatt rot $\lambda = -5$. Det følgjer då av Proposisjon 3.18 at den generelle løysinga vert

$$y(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 t e^{-5t}.$$

Vidare har me

$$2 = y(0) = C_1$$

og

$$\begin{aligned} y'(t) &= -5C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-5t} - 5C_2 t e^{-5t} \\ -1 = y'(0) &= -5C_1 + C_2 \\ C_2 &= 9 \end{aligned}$$

så løysinga vert

$$y(t) = 2e^{-5t} + 9te^{-5t}.$$

Oppgåver frå læreboka, s. lxii

13 Først skriv me likninga på forma $x'' + \omega_0^2 x = 0$.

$$\frac{2}{5}x'' + kx = 0 \Rightarrow x'' + \frac{5k}{2}x = 0$$

ω_0 er vinkelfrekvensen til systemet, og sidan perioden er $\frac{\pi}{2}$ får me

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

På den andre sida har me

$$\omega_0^2 = \frac{5k}{2} \Rightarrow k = \frac{32}{5}$$

Sidan $x(0) = 2$, som er amplityden, må $t = 0$ vera eit maksimum for x. Dermed får me $v_0 = x'(0) = 0$.

16 a)

$$mg = kx \Rightarrow k = \frac{mg}{x} = \frac{1 \cdot 9{,}8}{4{,}9} = 2$$

b)

Likninga for systemet er

$$\begin{aligned} mx'' + \mu x' + kx &= 0 \\ x'' + 3x' + 2x &= 0. \end{aligned}$$

Dermed vert den karakteristiske likninga $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, som har røter $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = -2$. Den generelle løysinga er då

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}.$$

Lat x ha positiv retning oppover. Då har me at $x(0) = -1$ og $x'(0) = -1$.

$$-1 = x(0) = C_1 + C_2$$

$$x'(t) = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t}$$

$$-1 = x'(0) = -C_1 - 2C_2$$

Frå desse likningane får me $C_1 = -3$ og $C_2 = 2$. Altså er posisjonen som funksjon av tid

$$x(t) = -3e^{-t} + 2e^{-2t}.$$

$\boxed{24}$ Me finn først fjørkonstanten

$$mg = kx \Rightarrow k = \frac{mg}{x} = \frac{10 \cdot 9{,}8}{1} = 98$$

Likninga for systemet er

$$mx'' + \mu x' + kx = 0$$

$$10x'' + 20x' + 98x = 0$$

$$x'' + 2x' + 9{,}8x.$$

Dermed vert den karakteristiske likninga $\lambda^2 + 2\lambda + 9{,}8 = 0$, som har røter $\lambda = -1 \pm \omega_0 i$, der $\omega_0 \approx 2{,}9665$. Den generelle løysinga er då

$$x(t) = e^{-t}(C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t).$$

Lat x ha positiv retning oppover. Då har me at $x(0) = 0$ og $x'(0) = -1{,}2$.

$$0 = x(0) = C_1$$

$$x'(t) = e^{-t}(-C_1 \cos \omega_0 t - C_2 \sin \omega_0 t - \omega_0 C_1 \sin \omega_0 t + \omega_0 C_2 \cos \omega_0 t)$$

$$1{,}2 = y'(0) = -C_1 + \omega_0 C_2$$

$$C_2 \approx -0{,}4045$$

Løysinga er då

$$x = C_2 e^{-t} \sin \omega_0 t = C_2 e^{-t} \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) = -C_2 e^{-t} \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$$

Så amplityden er $-C_2 \approx 0{,}4045$, vinkelfrekvensen er $\omega_0 \approx 2{,}9665$ og faseforskyvinga er $-\frac{\pi}{2}$.

Eksamensoppgåver

$\boxed{2}$ a)

Hvis vi setter $y = xe^x$ inn i likningen $y'' + ay' + b = 0$, så får vi $(2e^x + xe^x) + a(e^x + xe^x) + bxe^x = 0$, eller $(2+a)e^x + (1+a+b)xe^x = 0$. De blir $a = -2, b = 1$.

b)

Bevegelsen er overdempet når den karakteristiske likningen har to reelle røtter, dette gir $4^2 > 4m \Rightarrow m < 4$.

$\boxed{4}$ a) Wronskideterminanten er

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$= e^{\lambda t}\cos(\omega t)(\lambda e^{\lambda t}\sin(\omega t) + \omega e^{\lambda t}\cos(\omega t)) - e^{\lambda t}\sin(\omega t)(\lambda e^{\lambda t}\cos(\omega t) - \omega e^{\lambda t}\sin(\omega t))$$
$$= \omega e^{2\lambda t}\cos^2(\omega t) + \omega e^{2\lambda t}\sin^2(\omega t) = \omega e^{2\lambda t}$$

Løsningene til karakteristisk likning

$$r^2 + cr + k = 0$$

er $r = \lambda \pm i\omega = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4k}}{2}$, (siden vi har underdempet svingning er $c^2 - 4k < 0$). Dvs

$$\lambda \pm i\omega = \frac{-c \pm \sqrt{4k - c^2}}{2} = -\frac{c}{2} \pm i\sqrt{k - \frac{c^2}{4}}$$

Dvs $\lambda = -\frac{c}{2}$ og $\omega^2 = k - \frac{c^2}{4}$. Wronskideterminanten blir

$$W = \sqrt{k - \frac{c^2}{4}} e^{-ct}$$

b) Maksimums-amplituden er gitt ved $A_0 e^{\lambda t}$. En svingning varer 2 sekund. Dvs 15 svingninger tar 30 sekunder. Det gir $A_0 e^{-\frac{c}{2}(t_0+30)} = \frac{1}{4} A_0 e^{-\frac{c}{2}t_0}$. Vi løser og får $e^{-15c} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -15c = \ln\frac{1}{4} \Leftrightarrow c = (ln\frac{1}{4})/(-15) \approx 0{,}0924$.