Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet Institutt for matematiske fag	TMA4110 Matematikk 3 Haust 2011 **Løysingsforslag – Øving 3**

Oppgåver frå læreboka, s. lxxi

$\boxed{7}$ Anta at $y_p = a\cos 2t + b\sin 2t$. Då har me

$$y_p' = -2a\sin 2t + 2b\cos 2t$$
$$y_p'' = -4a\cos 2t - 4b\sin 2t.$$

Me set dette inn i likninga og får

$$-4a\cos 2t - 4b\sin 2t - 14a\sin 2t + 14b\cos 2t + 6a\cos 2t + 6b\sin 2t = 3\sin 2t$$
$$(2a + 14b)\cos 2t + (-14a + 2b)\sin 2t = 3\sin 2t.$$

Dermed har me $2a + 14b = 0$ og $-14a + 2b = 3$, som gir $a = -\frac{21}{100}$ og $b = \frac{3}{100}$. Altså vert den spesielle løysinga

$$y_p = -\frac{21}{100}\cos 2t + \frac{3}{100}\sin 2t.$$

$\boxed{12}$ Me løyser den komplekse likninga

$$z'' + 7z' + 6z = 3e^{2it}.$$

Anta at løysinga er på forma $z = ae^{2it}$. Det gir $z' = 2iae^{2it}$ og $z'' = -4ae^{-2it}$. Me set det inn i likninga og får

$$(-4a + 14ia + 6a)e^{2it} = 3e^{2it}$$
$$2a + 14ia = 3$$
$$a = \frac{3}{2+14i} = \frac{3}{100} - i\frac{21}{100}$$

Altså får me

$$z = \frac{3-21i}{100}e^{2it} = \frac{3}{100}\cos 2t + \frac{21}{100}\sin 2t + i\left(\frac{3}{100}\sin 2t - \frac{21}{100}\cos 2t\right)$$

og imaginærdelen av dette er løysinga til den opphavelege likninga:

$$y = \frac{3}{100}\sin 2t - \frac{21}{100}\cos 2t.$$

$\boxed{21}$ Me løyser først den homogene likninga

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Den karakteristiske likninga er $r^2 - 2r + 5 = 0$ som har røter $r = 1 \pm 2i$. Dermed gir Proposisjon 3.11 den generelle løysinga

$$y_h = e^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

Så finn me ei spesiell løysing. Anta at løysinga er på forma $y = A_1 \cos t + A_2 \sin t$. Då får me $y' = -A_1 \sin t + A_2 \cos t$ og $y'' = -A_1 \cos t - A_2 \sin t$. Me set dette inn i likninga og får

$$-A_1 \cos t - A_2 \sin t - 2(-A_1 \sin t + A_2 \cos t) + 5(A_1 \cos t + A_2 \sin t) = 3 \cos t.$$

Me ser på cosinus- og sinusledda kvar for seg og får

$$-A_1 \cos t - 2A_2 \cos t + 5A_1 \cos t = 3 \cos t$$

$$4A_1 - 2A_2 = 3$$

$$-A_2 \sin t + 2A_1 \sin t + 5A_2 \sin t = 0$$

$$2A_1 + 4A_2 = 0.$$

Dette gir $A_1 = \frac{3}{5}$ og $A_2 = -\frac{3}{10}$, så den spesielle løysinga vert

$$y_p = \frac{3}{5} \cos t - \frac{3}{10} \sin t.$$

og den generelle løysinga

$$y = e^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + \frac{3}{5} \cos t - \frac{3}{10} \sin t.$$

Til slutt løyser me initialverdiproblemet.

$$0 = y(0) = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + \frac{3}{5} \cos t - \frac{3}{10} \sin 0$$

$$C_1 + \frac{3}{5} = 0$$

$$C_1 = -\frac{3}{5}$$

$$y'(t) = e^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + e^t(-2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t) - \frac{3}{5} \sin t - \frac{3}{10} \cos t$$

$$-2 = y'(0) = C_1 + 2C_2 - \frac{3}{10}$$

$$C_2 = \frac{1}{2}(-2 - C_1 + \frac{3}{10}) = -\frac{11}{20}$$

Så løysinga som tilfredsstiller initialverdiane er

$$y = e^t(-\frac{3}{5} \cos 2t - \frac{11}{20} \sin 2t) + \frac{3}{5} \cos t - \frac{3}{10} \sin t.$$

$\boxed{26}$ Me prøver å finna ei spesiell løysing til den komplekse likninga

$$z'' + 4z = 4e^{2it}.$$

Me prøver først med ei løysing på forma $z = Ae^{2it}$, men det går ikkje (sjekk dette). I staden prøver me $z = Ate^{2it}$. Dette gir $z' = A(e^{2it} + 2ite^{2it})$ og $z'' = A(2ie^{2it} + 2ie^{2it} - 4te^{2it})$. Me set dette inn og får

$$A(2ie^{2it} + 2ie^{2it} - 4te^{2it}) + 4Ate^{2it} = 4e^{2it}$$

$$4Aie^{2it} = 4e^{2it}$$

$$A = \frac{1}{i} = -i.$$

Altså får me $z = -ite^{2it} = -it\cos 2t + t\sin 2t$ og den spesielle løysinga til den opphavelege likninga vert

$$y_p = t\sin 2t.$$

$\boxed{34}$ Me deler opp likninga i

$$y_1'' + 2y_1' + y_1 = 3$$

og

$$y_2'' + 2y_2' + y_2 = -e^{-t}.$$

Den første likninga har løysinga $y_1 = 3$. For den andre fungerer korkje $y_2 = Ae^{-t}$ eller $y_2 = Ate^{-t}$, så me set $y_2 = At^2e^{-t}$. Det gir $y_2' = A(-t^2e^{-t} + 2te^{-t})$ og $y_2'' = A(t^2e^{-t} - 2te^{-t} - 2te^{-t} + 2e^{-t})$. ;e set dette inn i likninga og får

$$A(t^2e^{-t} - 2te^{-t} - 2te^{-t} + 2e^{-t}) + 2A(-t^2e^{-t} + 2te^{-t}) + At^2e^{-t} = -e^{-t}$$

$$2Ae^{-t} = -e^{-t}$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

$$y_2 = -\frac{1}{2}t^2e^{-t}.$$

Løysinga på den opphavelege likninga vert då

$$y = y_1 + y_2 = 3 - \frac{1}{2}t^2e^{-t}.$$

$\boxed{44}$ $y = e^{-2t}(a\cos t + b\sin t)$ gir $y' = -2e^{-2t}(a\cos t + b\sin t) + e^{-2t}(-a\sin t + b\cos t) = e^{-2t}((b-2a)\cos t - (a+2b)\sin t)$ og $y'' = e^{-2t}((2a-b)\sin t - (a+2b)\cos t) - 2e^{-2t}((b-2a)\cos t - (a+2b)\sin t) = e^{-2t}(3a-4b)\cos t + (4a+3b)\sin t)$. Me set dette inn i likninga og får

$$e^{-2t}(3a-4b)\cos t + (4a+3b)\sin t) + 2e^{-2t}((b-2a)\cos t - (a+2b)\sin t) + 2e^{-2t}(a\cos t + b\sin t)$$

$$= e^{-2t}\sin t$$

$$(a-2b)\cos t + (2a+b)\sin t = \sin t$$

som gir $a - 2b = 0$ og $2a + b = 1$. Dermed får me $b = \frac{1}{5}$ og $a = \frac{2}{5}$, så den spesielle løysinga vert

$$y_p = e^{-2t}(\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t).$$

$\boxed{45}$ Me har at $z = x + iy$ er ei løysing av $z'' + pz' + qz = Ae^{(a+bi)t}$. Me deriverer z og set inn på venstre side, og skriv om høgre side til trigonometrisk form.

$$x'' + iy'' + px' + ipy' + qx + iqy = Ae^{at}\cos bt + iAe^{at}\sin bt$$

Me deler opp i ei reell og ei imaginær likning:

$$x'' + px' + qx = Ae^{at}\cos bt$$

$$iy'' + ipy' + iqy = iAe^{at}\sin bt \Leftrightarrow y'' + py' + qy = Ae^{at}\sin bt$$

som er det me skulle visa.

Oppgåver frå læreboka, s. lxxvi

$\boxed{3}$ Først finn me to lineært uavhengige løysingar av den homogene likninga

$$y'' - y = 0.$$

Den karakteristiske likninga har røtene ± 1, så $y_1 = e^t$ og $y_2 = e^{-t}$ er løysingar (sjekk at dei er lineært uavhengige).

Anta at likninga

$$y'' - y = t + 3 \tag{1}$$

har ei spesiell løysing på forma $y_p(t) = f(t)e^t + g(t)e^{-t}$. Dette gir $y_p' = fe^t + f'e^t - ge^{-t} + g'e^{-t}$. Anta vidare at

$$f'e^t = -g'e^{-t}. \tag{2}$$

Då får me $y_p' = fe^t - ge^{-t}$ og $y_p'' = fe^t + f'e^t + ge^{-t} - g'e^{-t}$. Me set dette inn i likning (1) og får

$$f'e^t - g'e^{-t} = t + 3$$

Så set me inn likning (2) og får

$$2f'e^t = t + 3 \Leftarrow f' = \frac{t+3}{2}e^{-t}.$$

Me set dette inn att i likning 2 og får

$$\frac{t+3}{2}e^{-t}e^t = -g'e^{-t} \Leftarrow g' = -\frac{t+3}{2}e^t.$$

Me finn f og g ved integrasjon:

$$f = \int \frac{t+3}{2}e^{-t}dt = -\frac{1}{2}te^{-t} - 2e^{-t}$$

$$g = \int -\frac{t+3}{2}e^t dt = -\frac{1}{2}te^t - e^t$$

Den spesielle løysinga på likning (1) vert då

$$y_p = (-\frac{1}{2}te^{-t} - 2e^{-t})e^t + (-\frac{1}{2}te^t - e^t)e^{-t} = -t - 3.$$

$\boxed{6}$ Me finn først to uavhengige løysingar til den homogene likninga

$$x'' - 4x' + 4x = 0.$$

den karakteristiske likninga har repetert løysing 2, så $x_1 = e^{2t}$ og $x_2 = te^{2t}$ lineært uavhengige løysingar.

Likninga

$$x'' - 4x' + 4x = e^{2t}$$

har då ei spesiell løysing $x = fe^{2t} + gte^{2t}$. Me brukar formlane 6.16 frå side lxxv til å finna f og g:

$$f = \int \frac{-te^{2t}e^{2t}}{e^{2t}(e^{2t} + 2te^{2t}) - 2e^{2t}te^{2t}} dt = -\frac{1}{2}t^2$$

$$g = \int \frac{e^{2t}e^{2t}}{e^{2t}(e^{2t} + 2te^{2t}) - 2e^{2t}te^{2t}} dt = t$$

Dermed vert den spesielle løysinga

$$x = -\frac{1}{2}t^2e^{2t} + t \cdot te^{2t} = \frac{1}{2}t^2e^{2t}.$$

$\boxed{12}$ Me finn først to uavhengige løysingar til den homogene likninga

$$y'' + y = 0.$$

Den karakteristiske likninga har løysingar $\pm i$, så $y_1 = \cos t$ og $y_2 = \sin t$ er lineært uavhengige løysingar.

Likninga

$$y'' + y = \frac{1}{\cos t} + \cos t - 1$$

har då ei spesiell løysing $y_p = f\cos t + g\sin t$. Me brukar formlane 6.16 frå side lxxv til å finna f og g:

$$f = \int \frac{-\sin t(\frac{1}{\cos t} + \cos t - 1)}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \ln(\cos t) + \frac{1}{2}\cos^2 t - \cos t$$

$$g = \int \frac{\cos t(\frac{1}{\cos t} + \cos t - 1)}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t - \sin t$$

Dermed vert den spesielle løysinga

$$y = \cos t(\ln(\cos t) + \frac{1}{2}\cos^2 t - \cos t) + \sin t(\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t - \sin t)$$

$$= \cos t \cdot \ln(\cos t) + \frac{1}{2}\cos^3 t + \frac{1}{2}\sin^2 t\cos t + \frac{3}{2}t\sin t - \cos^2 t - \sin^2 t$$

$$= \cos t \cdot \ln(\cos t) + \frac{1}{2}\cos t + \frac{3}{2}t\sin t - 1.$$

$\boxed{13}$ (OBS! Viss du vil bruka formlane (6.16) her, må du først skriva om likninga til forma $y'' + fy' + gy = h$. Viss du i staden gjer heile utrekninga treng du ikkje bekymra deg om det.)

Sjekk først at y_1 og y_2 er løysingar.

Anta at likninga

$$t^2y'' + 3ty' - 3y = t^{-1} \tag{3}$$

har ei spesiell løysing på forma $y_p(t) = f(t)t + g(t)t^{-3}$. Dette gir $y_p' = f' \cdot t + f + g' \cdot t^{-3} - 3gt^{-4}$. Anta vidare at

$$f' \cdot t = -g' \cdot t^{-3}. \tag{4}$$

Då får me $y_p' = f - 3gt^{-4}$ og $y_p'' = f' - 3g' \cdot t^{-4} + 12gt^{-5}$. Me set dette inn i likning (3) og får

$$t^2(f' - 3g' \cdot t^{-4} + 12gt^{-5}) + 3t(f - 3gt^{-4}) - 3(ft + gt^{-3}) = t^{-1}$$

$$t^2f' - 3t^{-2}g' = t^{-1}$$

Så set me inn likning (4) og får

$$-t^{-2}g' - 3t^{-2}g' = t^{-1} \Leftarrow g' = -\frac{1}{4}t.$$

Me set dette inn att i likning (4) og får

$$tf' = \frac{1}{4}t \cdot t^{-3} \Leftarrow f' = \frac{1}{4}t^{-3}.$$

Me finn f og g ved integrasjon:

$$f = \int \frac{1}{4}t^{-3}dt = -\frac{1}{8}t^{-2}$$

$$g = \int -\frac{1}{4}tdt = -\frac{1}{8}t^2$$

Den spesielle løysinga på likning (1) vert då

$$y_p = -\frac{1}{8}t^{-2} \cdot t - \frac{1}{8}t^2 \cdot t^{-3} = -\frac{1}{4t},$$

og den generelle løysinga vert

$$y = C_1t + C_2t^{-3} - \frac{1}{4t}.$$

Eksamensoppgåve

$\boxed{3}$ a)

Anta at $y = x^m$. Me deriverer og set inn i likninga:

$$m(m-1)x^{m-2} - 3mx^{m-2} - 5x^{m-2} = 0$$

$$m^2 - 4m - 5 = 0$$

Dette gir $m_1 = 5$ og $m_2 = -1$. Altså er $y_1 = x^5$ og $y_2 = x^{-1}$ løysingar, og dei er lineært uavhengige sidan $\frac{y_1}{y_2} = x^6$ ikkje er ein konstant.

b)

Likninga
$$y'' - \frac{3}{x}y' - \frac{5}{x^2}y = x^3$$
har då ei spesiell løysing $y_p = fx^5 + gx^{-1}$. Me brukar formlane 6.16 frå side lxxv til å finna f og g:
$$f = \int \frac{-x^{-1}x^3}{x^5 \cdot (-x^{-2}) - 5x^4 \cdot x^{-1}} dx = \frac{1}{6} \ln x$$
$$g = \int \frac{x^5 x^3}{x^5 \cdot (-x^{-2}) - 5x^4 \cdot x^{-1}} dx = -\frac{1}{36}x^6$$
Dermed vert den spesielle løysinga
$$y_p = \frac{1}{6}\ln(x)x^5 - \frac{1}{36}x^5,$$
og den generelle løysinga vert
$$y = Ax^5 + Bx^{-1} + \frac{1}{6}\ln(x)x^5.$$