Oppgåver frå læreboka, s. lxxxiv

$\boxed{9}$ a)

Likninga for systemet vert

$$y'' + 4y = 4\cos\omega t.$$

Me løyser først den tilhøyrande homogene likninga

$$y'' + 4y = 0.$$

Den karakteristiske likninga har røter $r = \pm 2i$, så me får $y_h = A\cos 2t + B\sin 2t$.

Anta ei spesiell løysing på forma $C\cos\omega t$ (me antek her $\omega \neq 2$). Me deriverer og set inn:

$$-C\omega^2 \cos\omega t + 4C\cos\omega t = 4\cos\omega t$$
$$C(4-\omega^2) = 4$$
$$C = \frac{4}{4-\omega^2}$$

Altså vert den generelle løysinga $y = A\cos 2t + B\sin 2t + C\cos\omega t$. Me har gitt initialverdiane $y(0) = 0$ og $y'(0) = 0$. Dette gir

$$0 = y'(0) = 2B\cos 2t \Rightarrow B = 0$$

$$0 = y(0) = A + C \Rightarrow A = -C$$

så posisjonen som funksjon av tid vert

$$y = -C\cos 2t + C\cos\omega t = \frac{4}{4-\omega^2}(\cos\omega t - \cos 2t).$$

b)

$$y = \frac{4}{4-\omega^2}(\cos\omega t - \cos 2t) = \frac{4}{4-\omega^2}\cdot 2\sin\frac{2t-\omega t}{2}\sin\frac{2t+\omega t}{2} = \frac{8}{4-\omega^2}\sin(\frac{2-\omega}{2}t)\sin(\frac{2+\omega}{2}t)$$

Me har $\omega_0 = 2$, så me vel $\omega = \frac{9}{5}$. Då får me

$$x(t) = \frac{200}{19}\sin\frac{t}{10}\sin\frac{19t}{10}.$$

$\boxed{10}$ a)

Me løyser først den tilhøyrande homogene likninga

$$y'' + 25y = 0.$$

Den karakteristiske likninga har røter $r = \pm 5i$, så me får $y_h = A\cos 5t + B\sin 5t$.

Anta ei spesiell løysing på forma $x = Ct\cos 5t + Dt\sin 5t$ ($C\cos 5t + D\sin 5t$ er ei løysing av den homogene likninga). Me deriverer og set inn:

$$-10C\sin 5t + 10D\cos 5t - 25Ct\cos 5t - 25Dt\sin 5t + 25(Ct\cos 5t + Dt\cos 5t) = 4\cos 5t$$

Dette gir $C = 0$ og $D = \frac{2}{5}$.

Altså vert den generelle løysinga $y = A\cos 5t + B\sin 5t + \frac{2}{5}t\sin 5t$. Me har gitt initialverdiane $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$. Dette gir

$$1 = x(0) = A\cos 5t \Rightarrow A = 1$$

$$0 = x'(0) = 5B \Rightarrow B = 0$$

så posisjonen som funksjon av tid vert

$$x = \cos 5t + \frac{2}{5}t\sin 5t.$$

Leddet med $t\sin 5t$ viser at me får resonans.

b)

$\boxed{15}$ Frå likninga

$$x'' + 4x' + 8x = 3\cos 2\pi t$$

har me at $c = 2$, $\omega_0^2 = 8$, $A = 3$ og $\omega = 2\pi$. Likning (7.15) i boka gir då gain

$$G = \frac{1}{\sqrt{(8-4\pi^2)^2 + 64\pi^2}} \approx 0{,}02843$$

og (7.14) gir faseforskyving

$$\phi = \cot^{-1}\frac{8-4\pi^2}{8\pi}(= \tan^{-1}\frac{8\pi}{8-4\pi^2}) \approx 2{,}4678.$$

Steady-state-løysinga vert då

$$x = GA\cos(\omega t - \phi) \approx 0{,}0745\cos(2\pi t - 2{,}4678).$$

$\boxed{31}$ Frå likninga har me $c = 0{,}005$ og $\omega_0^2 = 49$. Likning (7.15) gir dermed gain

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(49-\omega^2)^2 + 0{,}0001\omega^2}}.$$

Me ser at maksimum er ved $\omega \approx 7$.

$\boxed{35}$ Formelen for gain finn me på side lxxxi:

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4c^2\omega^2}}$$

Me deriverer G og får

$$G'(\omega) = -2\frac{\omega^3 + (2c^2 - \omega_0^2)\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4c^2\omega^2}^{\frac{3}{2}}}$$

Me har $G'(\omega) = 0$ viss og berre viss teljaren er 0, så dei kritiske punkta til G er løysingane til

$$\omega^3 + (2c^2 - \omega_0^2)\omega = 0$$
$$\omega(\omega^2 + 2c^2 - \omega_0^2) = 0.$$

$\omega = 0$ er ei løysing, det er også løysingane til

$$\omega^2 + 2c^2 - \omega_0^2 = 0,$$

$\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2c^2}$ (her treng me at $\omega_0^2 > 2c^2$, elles blir $\omega = 0$ den einaste reelle løysinga). Me kan sjå vekk frå $\omega = -\sqrt{\omega_0^2 - 2c^2}$, sidan frekvensar ikkje kan vera negative.

For å avgjera om dei kritiske punkta er maksimum sjekkar me forteiknet til G' i to andre punkt, ω_0 og $\frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 - 2c^2}$. Merk at $0 < \frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 - 2c^2} < \sqrt{\omega_0^2 - 2c^2} < \omega_0$. Igjen treng me berre sjå på teljaren, nemnaren er alltid positiv.

$$\omega_0^3 + 2c^2\omega_0 - \omega_0^3 = 2c^2\omega_0 > 0$$

altså har me $G'(\omega_0) < 0$.

$$\begin{aligned}(\frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 - 2c^2})^3 + (2c^2 - \omega_0^2)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 - 2c^2} &= \frac{1}{8}\sqrt{\omega_0^2 - 2c^2}(\omega_0^2 - 2c^2) - \frac{1}{2}(\omega_0^2 - 2c^2)\sqrt{\omega_0^2 - 2c^2} \\ &= -\frac{3}{8}(\omega_0^2 - 2c^2)\sqrt{\omega_0^2 - 2c^2} < 0\end{aligned}$$

sidan $\omega_0^2 > 2c^2$, altså har me $G'(\frac{1}{2}\sqrt{\omega_0^2 - 2c^2}) > 0$. Det betyr at $\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2c^2}$ er eit maksimum, og at $\omega = 0$ ikkje er det.

Når me set inn tala frå oppgåve 31 får me

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{49 - 2 \cdot 0{,}005^2} = 6{,}999996 = 7.$$

45 Me finn først fjørkonstanten k. Når systemet er i likevekt har me $mg = kx_0$ der m er massen, g er gravitasjonen og x_0 er kor langt fjøra er strekt (Newtons 1. lov og Hookes lov).

$$mg = kx_0 \Rightarrow k = \frac{mg}{x_0} = \frac{0{,}05 \cdot 9{,}8}{0{,}1} = 4{,}9$$

.

Når systemet er sett i svinging har me (frå Newtons 2. lov)

$$ma = F(t) - \mu v - kx$$

der a er akselerasjon, v er fart, $\mu = 0{,}01$ er dempingskonstanten og x er posisjon (positiv retning oppover). Dermed får me

$$\begin{aligned}mx'' &= F(t) - \mu x' - kx \\ mx'' + \mu x' + kx &= F(t) \\ x'' + \frac{\mu}{m}x' + \frac{k}{m} &= \frac{1}{m}F(t) \\ x'' + 0{,}2x' + 98x &= 100\cos 4{,}4t.\end{aligned}$$

Me løyser først den homogene likninga

$$x'' + 0{,}2x' + 98x = 0.$$

Den karakteristiske likninga $r^2 + 0{,}2r + 98 = 0$ har løysingar $r = -0{,}1 \pm 9,899i$. Altså har den homogene likninga generell løysing

$$x_h = e^{-0{,}1t}(A\cos 9{,}899t + B\sin 9{,}899t).$$

For å finna ei spesiell løysing (stabil tilstand) brukar me den komplekse metoden. Anta at $z = Ce^{4{,}4it}$ er ei løysing av

$$z'' + 0{,}2z' + 98z = 100e^{4{,}4it}.$$

Me har $z' = 4{,}4Cie^{4{,}4it}$ og $z'' = -19{,}36Ce^{4{,}4it}$. Me set dette inn og får

$$-19{,}36Ce^{4{,}4it} + 0{,}88Cie^{4{,}4it} + 98Ce^{4{,}4it} = 100e^{4{,}4it}$$

$$C = \frac{100}{98 - 19{,}36 + 0{,}88i} = 1{,}2715 - 0{,}0142i = 1{,}2715e^{-0{,}0112i}$$

(i siste steg brukar me at $w = |w|e^{\arg(w)i}$ for alle komplekse tal w). Dermed får me $z = 1{,}2715e^{4{,}4it-0{,}0112i}$, og den spesielle løysinga av den opphavelege likninga er realdelen av z:

$$x_p = 1{,}2715\cos(4{,}4t - 0{,}0112).$$

Altså er den generelle løysinga

$$x = e^{-0{,}1t}(A\cos 9{,}899t + B\sin 9{,}899t) + 1{,}2715\cos(4{,}4t - 0{,}0112)$$

Initialvilkåra er $x(0) = 0$ og $x'(0) = 0$. Det gir

$$0 = x(0) = A + 1{,}2715\cos(-0{,}0112) \Rightarrow A = -1{,}2715$$

$$0 = x'(0) = -0{,}1A + 9{,}899B - 4{,}4 \cdot 1{,}2715 \cdot \sin(-0{,}0112) \Rightarrow B = -0{,}0192$$

så den endelege løysinga vert

$$x = e^{-0{,}1t}(-1{,}2715\cos 9{,}899t + -0{,}0192\sin 9{,}899t) + 1{,}2715\cos(4{,}4t - 0{,}0112).$$

Oppgåver frå læreboka, s. 10

$\boxed{2}$ Den utvida matrisa til systemet er

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 5 & 7 & 10 \end{bmatrix}.$$

Me gangar rad 1 med $\frac{1}{3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & 7 & 10 \end{bmatrix},$$

legg -5 ganger rad 1 til rad 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 15 \end{bmatrix}$$

og gangar rad 2 med $-\frac{1}{3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Dermed har me

$$x_2 = -5$$

$$x_1 + 2x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = -1 - 2x_2 = -1 + 10 = 9.$$

$\boxed{3}$ Dette er det same som å løysa likningssystemet

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

$$x_1 - x_2 = 1$$

som har utvida matrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Me trekk rad 1 frå rad 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

og gangar rad 2 med $-\frac{1}{3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dermed har me

$$x_2 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 = 4 \Rightarrow x_1 = 4 - 2x_2 = 2,$$

det vil seia at linjene kryssar i punktet $(2, 1)$.

$\boxed{7}$ Me har gitt matrisa

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Me kan eventuelt byta om rad 3 og rad 4, men me ser allereie at systemet er inkonsistent, sidan rad 3 gir likninga $0 = 1$. Med andre ord er løysingsmengda tom.

$\boxed{10}$ Me har gitt den utvida matrisa

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Me trekk 3 ganger rad 4 frå rad 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

legg 2 ganger rad 4 til rad 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

og trekk 3 ganger rad 2 frå rad 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -47 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Altså har systemet ei løysing:

$$x_1 = -47$$

$$x_2 = 12$$

$$x_3 = 2$$

$$x_4 = -2$$

13 Systemet har utvida matrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 2 & 2 & 9 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Me trekk 2 ganger rad 1 frå rad 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 2 & 15 & -9 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix},$$

byter om rad 2 og rad 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 15 & -9 \end{bmatrix},$$

trekk 2 gonger rad 2 frå rad 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

og gangar rad 3 med $\frac{1}{5}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 8 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dermed får me

$$x_3 = -1$$

$$x_2 + 5x_3 = -2 \Rightarrow x_2 = -2 + 5 = 3$$

$$x_1 - 3x_3 = 8 \Rightarrow x_1 = 8 - 3 = 5$$

18 Dei tre plana har felles punkt dersom dei tre likningane utgjer eit konsistent system. Systemet har utvida matrise

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Me trekk rad 1 frå rad 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \end{bmatrix},$$

og legg rad 2 til rad 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{bmatrix}.$$

Matrisa er no på trappeform og me ser at systemet er konsistent. Altså har plana minst eitt felles punkt (faktisk nøyaktig eitt).

$\boxed{33}$ Node 1 gir likninga

$$T_1 = \frac{10 + 20 + T_2 + T_4}{4} \Rightarrow 4T_1 - T_2 - T_4 = 30.$$

Node 2 gir likninga

$$T_2 = \frac{20 + 40 + T_1 + T_3}{4} \Rightarrow -T_1 + 4T_2 - T_3 = 60.$$

Node 3 gir likninga

$$T_3 = \frac{40 + 30 + T_2 + T_4}{4} \Rightarrow -T_2 + 4T_3 - T_4 = 70.$$

Node 4 gir likninga

$$T_4 = \frac{10 + 30 + T_1 + T_3}{4} \Rightarrow -T_1 - T_3 + 4T_4 = 40.$$

$\boxed{34}$ Systemet har utvida matrise

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 30 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 60 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 40 \end{bmatrix}.$$

Me reduserer:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 30 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 60 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 40 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 4 & 40 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 60 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\ 4 & -1 & 0 & -1 & 30 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 4 & 40 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\ 0 & -1 & -4 & 15 & 190 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & -40 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 70 \\ 0 & -1 & -4 & 15 & 190 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & -40 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 75 \\ 0 & 0 & -4 & 14 & 195 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & -40 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 270 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 & -40 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{75}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{45}{2} \end{bmatrix}$$

Dermed får me

$$T_4 = \frac{45}{2}$$

$$T_3 = \frac{75}{4} + \frac{45}{2 \cdot 2} = 30$$
$$T_2 = 5 + \frac{45}{2} = \frac{55}{2}$$
$$T_1 = -40 + \frac{4 \cdot 45}{2} - 30 = 20.$$