ODE

1 a)

Skriv inn

```
>>dsolve('D2y+y=(sin(t))^2')
```

MATLAB gir då svaret

```
cos(4*t)/24 - cos(2*t)/6 - cos(t)*(cos(3*t)/12
-(3*cos(t))/4) + C2*cos(t) + C3*sin(t) + 1/8.
```

Du kan så skriva

```
>>simple(ans)
```

for å få eit penare svar:

```
cos(2*t)/6 + C2*cos(t) + C3*sin(t) + 1/2
```

altså

$$y = \frac{1}{6}\cos 2t + \frac{1}{2} + C_2 \cos t + C_3 \sin t$$

b)

Skriv inn

```
>>dsolve('D2y+2*Dy+y=t^5*exp(t)')
```

og deretter

```
>>simple(ans)
```

Løysinga vert

$$y = \frac{1}{8}e^t(2t^5 - 10t^4 + 30t^3 - 60t^2 + 75t - 45) + C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$$

2 a)

Skriv inn

```
>>y=dsolve('D2y=y*Dy','y(0)=0','Dy(0)=2')
```

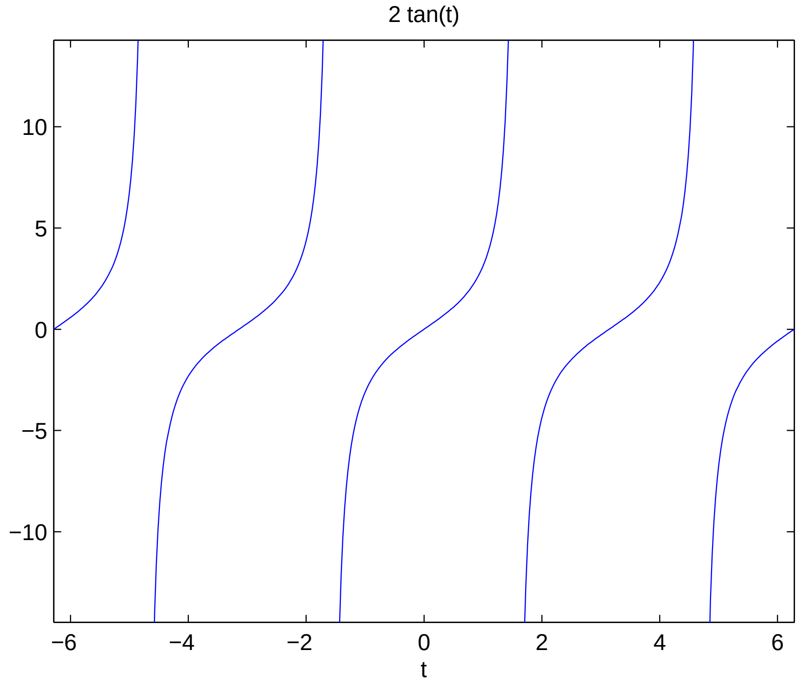
Løysinga vert

$$y = 2\tan t$$

Skriv så

```
ezplot(y)
```

for å plotta løysinga:



b)

Skriv inn

```
>>dsolve('t^2*D2y=(Dy)^2','y(-1)=2','Dy(-1)=1')
```

Løysinga vert

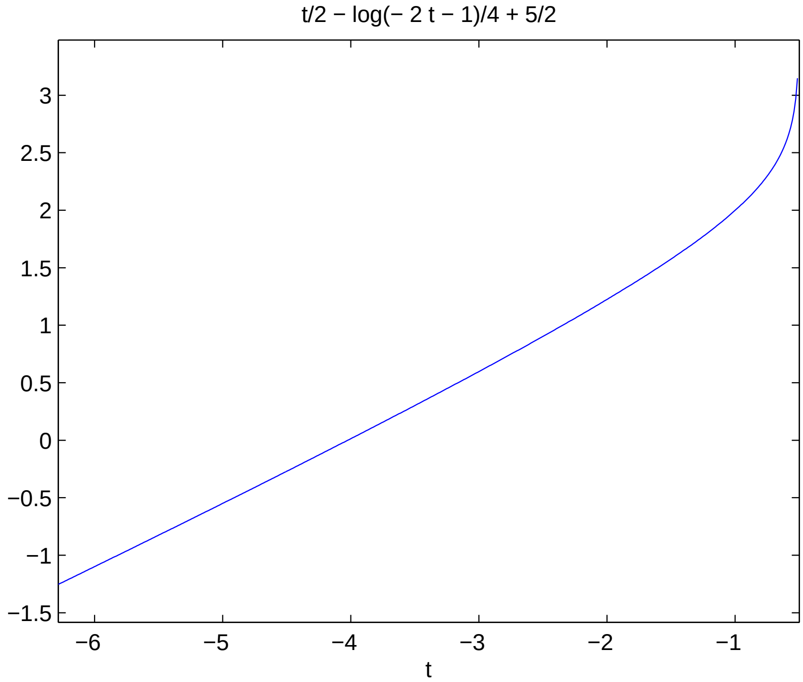
$$y = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\ln(-2t-1) + \frac{5}{2}.$$

(Merk at MATLAB-funksjonen **log** er naturleg logaritme, ikkje $\log_{10}$.)

Skriv så

```
ezplot(y)
```

for å plotta løysinga:



Løysinga er berre definert når $(-2t-1) > 0$, sidan me ikkje kan ta logaritmen av eit negativt tal.

$$-2t - 1 > 0 \Rightarrow t < -\frac{1}{2}$$

altså er løysinga definert på intervallet $(-\infty, -\frac{1}{2}$.

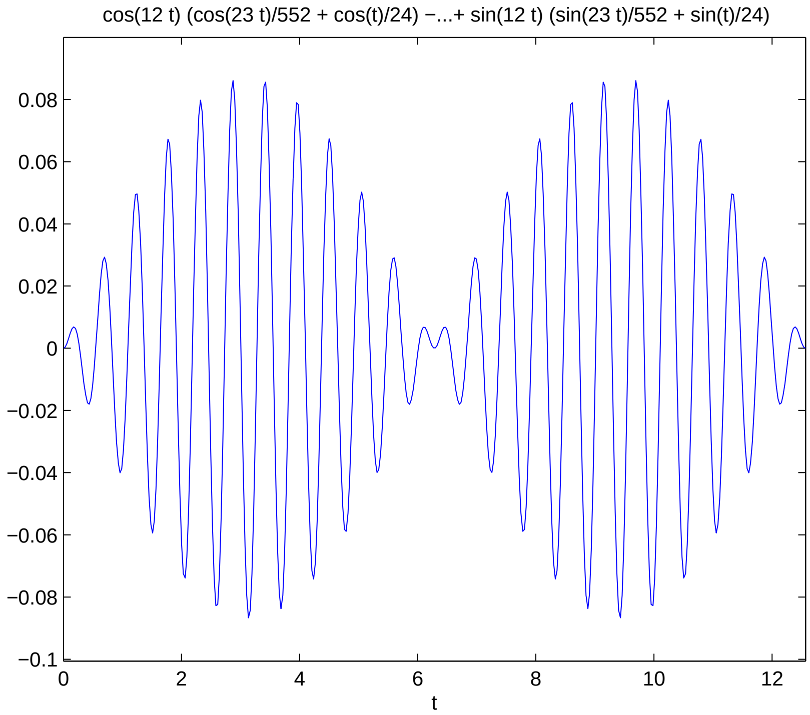
$\boxed{3}$ a)

Skriv inn

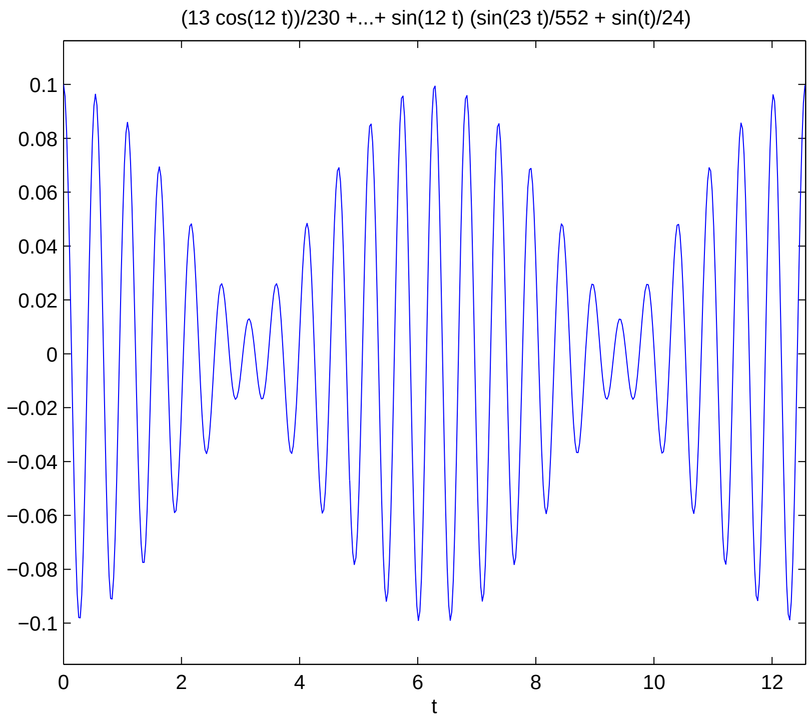
```
>ezplot(dsolve('D2y+144*y=cos(11*t)','y(0)=y0','Dy(0)=0'),[0,4*pi])
```

(byt ut y0 med 0, 0.1, etc.)

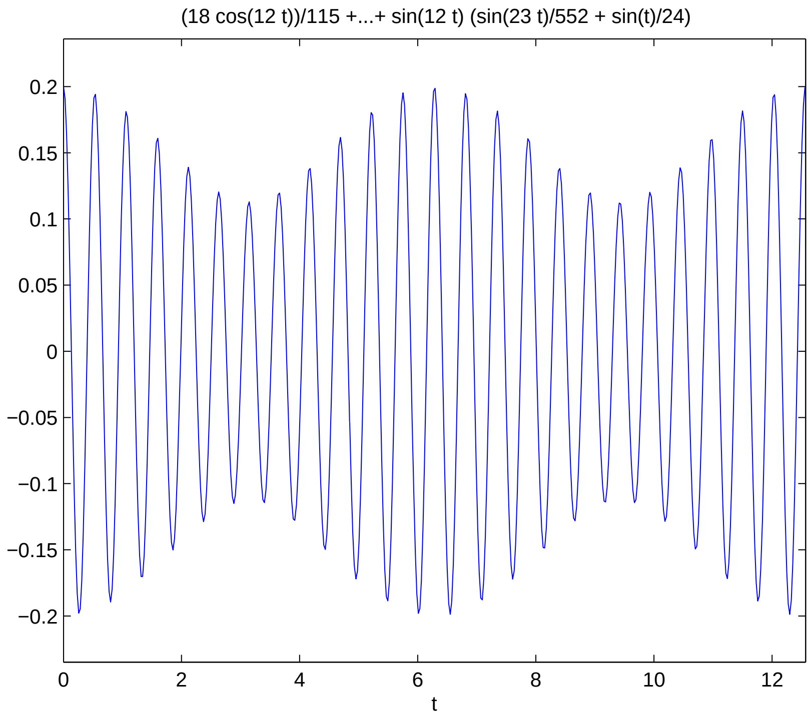
$y_0 = 0$:


cos(12 t) (cos(23 t)/552 + cos(t)/24) −...+ sin(12 t) (sin(23 t)/552 + sin(t)/24)
0.08
0.06
0.04
0.02
0
−0.02
−0.04
−0.06
−0.08
−0.1
0
2
4
6
8
10
12
t

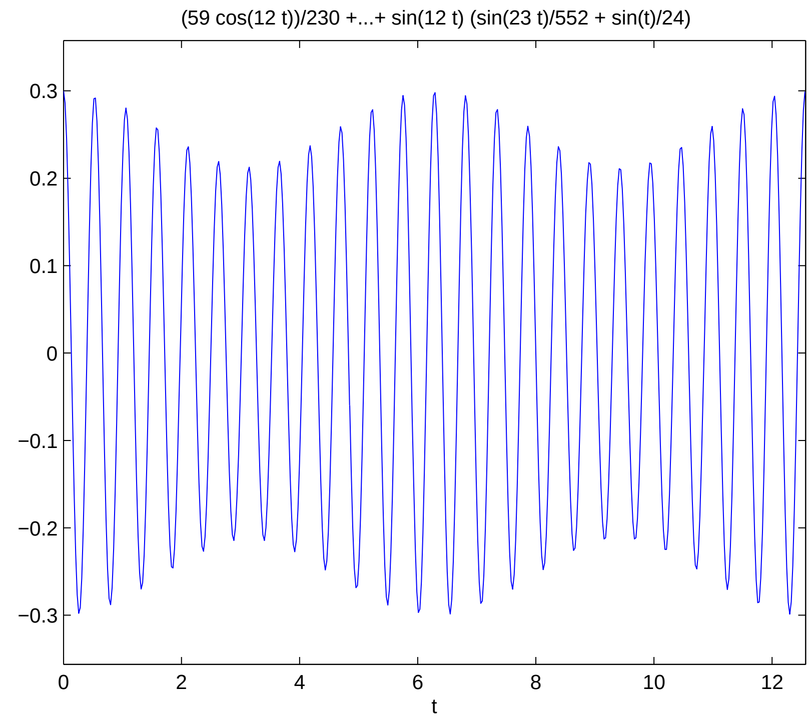
$y_0 = 0{,}1$:


(13 cos(12 t))/230 +...+ sin(12 t) (sin(23 t)/552 + sin(t)/24)
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
−0.02
−0.04
−0.06
−0.08
−0.1
0
2
4
6
8
10
12
t

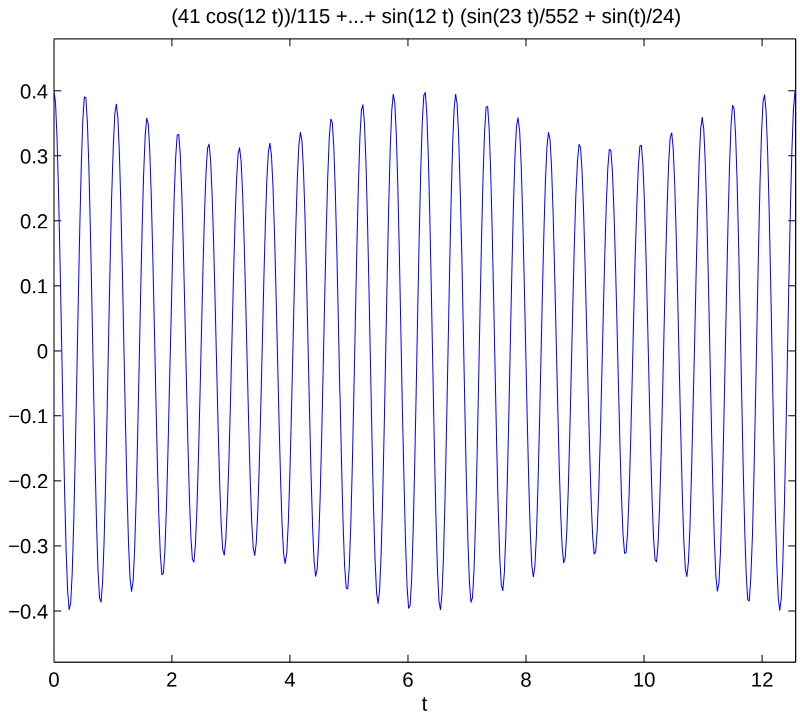
$y_0 = 0{,}2$:


(18 cos(12 t))/115 +...+ sin(12 t) (sin(23 t)/552 + sin(t)/24)
0.2
0.15
0.1
0.05
0
−0.05
−0.1
−0.15
−0.2
0
2
4
6
8
10
12
t

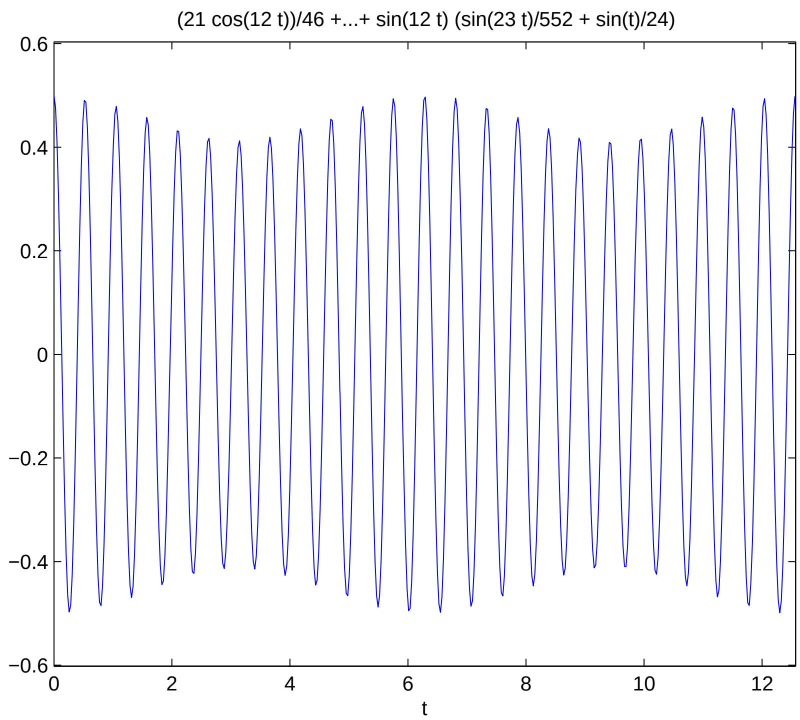
$y_0 = 0{,}3$:


(59 cos(12 t))/230 +...+ sin(12 t) (sin(23 t)/552 + sin(t)/24)
0.3
0.2
0.1
0
−0.1
−0.2
−0.3
0
2
4
6
8
10
12
t

$y_0 = 0{,}4$:



$y_0 = 0{,}5$:



Me ser at "beatingen" blir mindre og mindre tydeleg.

b)

Me skal finna ei spesiell løysing av

$$x'' + 2x' + 5x = 2\cos 3t.$$

Me gjer dette ved å løysa den komplekse likninga

$$z'' + 2z' + 5z = 2e^{3it}.$$

Anta at løysinga har forma $z = Ce^{3it}$. Me deriverer og set inn:

$$-9Ce^{3it} + 6iCe^{3it} + 5Ce^{3it} = 2e^{3it}$$

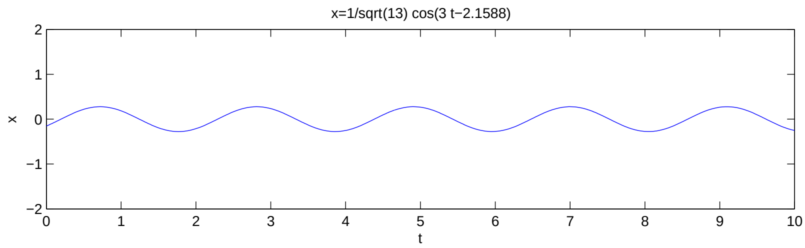
$$C = \frac{2}{-9+6i+5} = \frac{2}{\sqrt{(-4)^2+6^2}}e^{(\arg C)i} = \frac{1}{\sqrt{13}e^{-2{,}1588i}}$$

Altså har me $z = \frac{1}{\sqrt{13}}e^{-2{,}1588i}e^{3it} = \frac{1}{\sqrt{13}}e^{(3t-2{,}1588)i}$, og

$$x = \operatorname{Re} z = \frac{1}{\sqrt{13}}\cos(3t - 2{,}1588).$$

For å plotta løysinga skriv inn

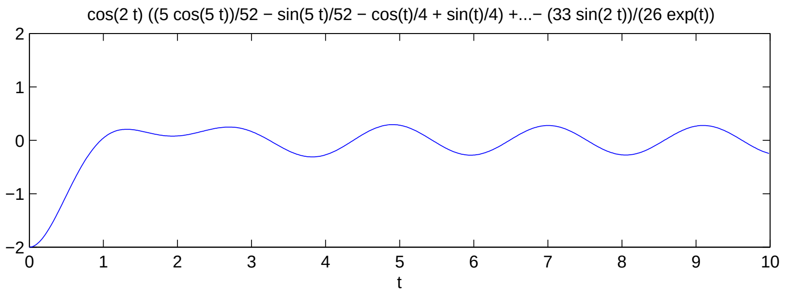
```
>>ezplot('x=1/sqrt(13)*cos(3*t-2.1588)',[0,10],[-2,2])
```

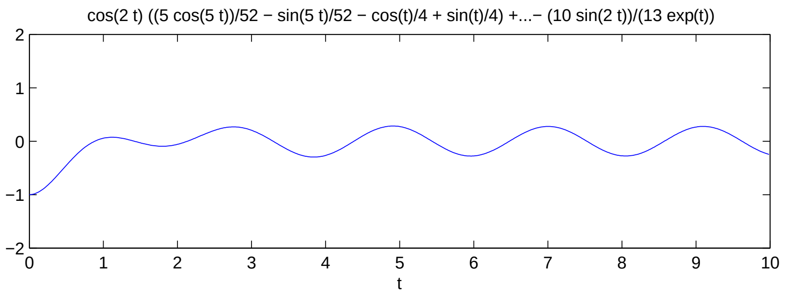


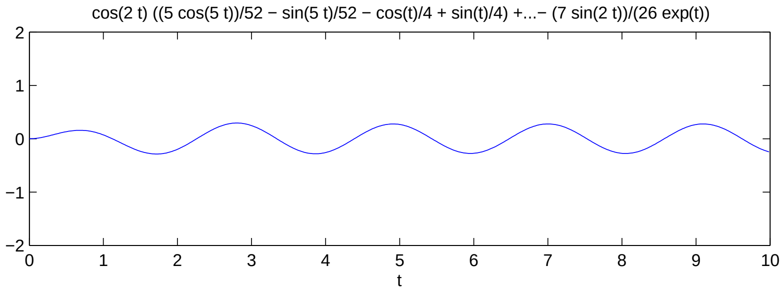
For å plotta løysingar av initialverdiproblema skriv inn

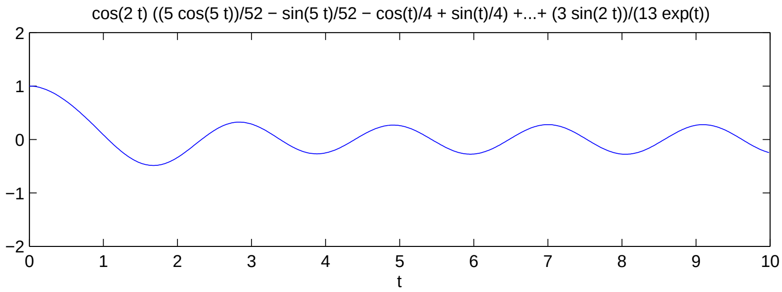
```
>>ezplot(dsolve('D2x+2*Dx+5*x=2*cos(3*t)','x(0)=-2','Dx(0)=0'),[0,10],[-2,2])
```

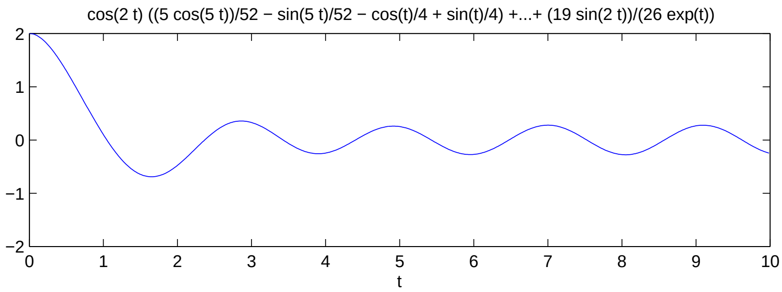
og så vidare.











Me ser at alle løysingane nærmar seg den stabile løysinga.

c)

Me brukar formlane på side lxxxi. Frå likninga ser me at $c = 0{,}2$, $\omega_0^2 = 2$, $\omega = 1$ og $A = 1$. Me får då

$$G(\omega) = \frac{1}{sqrt(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4c^2\omega^2} = \frac{1}{sqrt(2 - \omega^2)^2 + 0{,}16\omega^2}$$

$$\phi(\omega) = \cot^{-1}(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2c\omega}) = \tan^{-1}(\frac{2c\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}) = \tan^{-1}(\frac{0{,}4\omega}{2 - \omega^2})$$

$$H(i\omega) = G(\omega)e^{i\phi(\omega)}.$$

Den stabile løysinga vert

$$x(t) = G(1)A\cos(\omega t - \phi(1)) = 0{,}9285\cos(t - 0{,}3805).$$

For å plotta den ytre krafta, skriv inn

```
>> h=ezplot('y=cos(t)')
```

i MATLAB. Skriv så inn

```
>> set(h,'color','r')
```

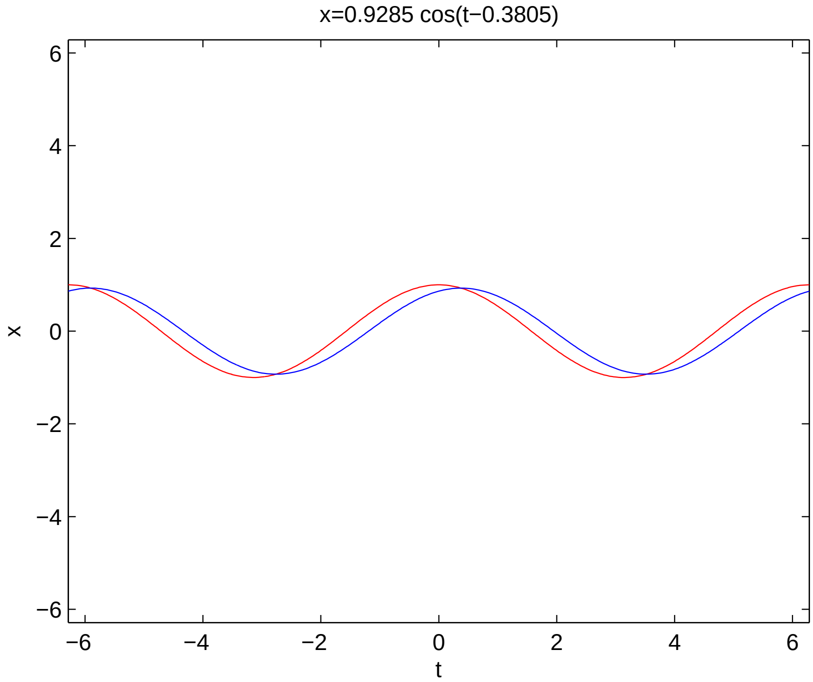
for å farga grafen raud. Skriv

```
>> hold on
```

for å fortelja MATLAB at du gjerne vil beholda denne grafen, og avslutt med

```
>> ezplot('x=0.9285*cos(t-0.3805)')
```

for å plotta den stabile løysinga. Resultatet skal bli noko slikt:



Gain kan no lesast av som maksverdien av den blå grafen delt på maksverdien av den raude (den siste er praktisk nok 1). Faseforskyvinga er den horisantale avstanden mellom makspunkta delt på frekvensen (også den 1).

Lineær Algebra

4 a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

I MATLAB, skriv inn

```
>>rref([0,-3,-6,4,9;-1,-2,-1,3,1;-2,-3,0,3,-1;1,4,5,-9,-7])
```

Dette gir same svar som i a).

5 Systemet har utvida matrise

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Me skriv inn

```
>>rref([2,0,-6,-8;0,1,2,3;3,6,-2,-4])
```

og får den reduserte trappeforma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Altså har systemet løysinga

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 2.$$

6 a)

For å finna den reduserte trappeforma til den utvida matrisa skriv me inn

```
rref([1,3,4,7;3,9,7,6])
```

i MATLAB. Me får

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Den generelle løysinga har ein fri variabel s:

$$x_1 = -5 - 3s$$

$$x_2 = s$$

$$x_3 = 3.$$

b)

Me brukar MATLAB-kommandoen **rref** til å finna redusert trappeform av den utvida matrisa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Den generelle løysinga har ein fri variabel s:

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 3$$

$$x_3 = s.$$

c)

Me brukar MATLAB-kommandoen **rref** til å finna redusert trappeform av den utvida matrisa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Den generelle løysinga har to frie variablar s og t:

$$x_1 = \frac{2}{3}s - \frac{4}{3}t$$
$$x_2 = s$$
$$x_3 = t.$$

d)

Systemet har utvida matrise

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 15 \\ 1 & 3 & 9 & 28 \end{bmatrix}.$$

Me brukar MATLAB-kommandoen **rref** til å finna redusert trappeform av den utvida matrisa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dermed vert polynomet $p(t) = 2t^2 + 3t + 1$.

7 a)

b er ein lineærkombinasjon av kolonnene i A viss og berre viss likningssystemet med utvida matrise

$$[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 & -7 \\ -2 & 8 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

har ei løysing. Me brukar MATLAB-kommandoen **rref** til å finna redusert trappeform av matrisa:

$$[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{26}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Me ser at systemet er inkonsistent, altså er **b** ikkje ein lineærkombinasjon av kolonnene i A.

b)

b er ein lineærkombinasjon av kolonnene i A viss og berre viss likningssystemet med utvida matrise

$$[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

har ei løysing. Me brukar MATLAB-kommandoen **rref** til å finna redusert trappeform av matrisa:

$$[A|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Me ser at systemet er konsistent, altså er $\mathbf{b}$ ein lineærkombinasjon av kolonnene i A.