TMA4110
Matematikk 3
Haust 2011

Løysingsforslag – Øving 6

Oppgåver frå læreboka, s. 40-41

$\boxed{13}$ **u** ligg i planet utspent av kolonnene i A viss og berre viss likningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{u}$$

har ei løysing. Me radreduserer den utvida matrisa:

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Me ser at systemet er konsistent, altså ligg **u** i det nemnde planet.

$\boxed{15}$ Me radreduserer den utvida matrisa:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & b_1 \\ -9 & 3 & b_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 + 3b_1 \end{bmatrix}$$

Me ser at systemet berre har løysingar når

$$3b_1 + b_2 = 0.$$

$\boxed{21}$ Nei, me må ha minst fire vektorar for å spenna ut $\mathbb{R}^4$.

Oppgåver frå læreboka, s. 47-48

$\boxed{5}$ Me radreduserer den utvida matrisa:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & -8 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette gir

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{17}$ Me radreduserer den utvida matrisa:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 8 \\ -4 & -4 & -8 & -16 \\ 0 & -3 & -3 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dette gir

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - x_3 \\ -4 - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{39}$ Me brukar Teorem 5 på side 39. Det gir at

$$A(c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = A(c\mathbf{v}) + A(d\mathbf{w}) = cA(\mathbf{v}) + dA(\mathbf{w}) = c\mathbf{0} + d\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Viss me så set $c = d = 1$ får me

$$A(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{0}.$$

Oppgåver frå læreboka, s. 61

$\boxed{11}$ Vektorane er lineært avhengige dersom det finst a og b slik at

$$a \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ h \end{bmatrix}.$$

Me radreduserer den utvida matrisa til dette systemet:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -2 & -6 & 2 \\ 4 & 7 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & h+4 \end{bmatrix}$$

Vektorane er lineært avhengige når systemet er konsistent, altså når

$$h + 4 = 0 \Rightarrow h = -4.$$

$\boxed{16}$ Me har at

$$-\frac{3}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

Sidan den eine vektoren er ein multippel av den andre er dei lineært avhengige.

$\boxed{17}$ Den eine av vektorane er nullvektoren, altså er denne mengda lineært avhengig (Teorem 9).

$\boxed{18}$ Denne mengda inneheld fire to-dimensjonale vektorar. Altså er den lineært avhengig (Teorem 8).

Oppgåver frå læreboka, s. 69

$\boxed{31}$ Me har at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært avhengig. Det betyr at det finst tal a, b og c, ikkje alle lik 0, slik at

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Me brukar T på begge sider av likninga og får

$$T(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3) = T(\mathbf{0})$$
$$aT(\mathbf{v}_1) + bT(\mathbf{v}_2) + cT(\mathbf{v}_3) = \mathbf{0}.$$

Det betyr at $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), T(\mathbf{v}_3)\}$ er lineært avhengig.

Oppgåver frå læreboka, s. 78-79

$\boxed{19}$ Me antek at T er ein lineær transformasjon, og finn den tilsvarande matrisa. Me har

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad T(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Altså har T matrise

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix},$$

viss T er ein lineær transformasjon. Me sjekkar så at $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 5x_2 + 4x_3 \\ x_2 - 6x_3 \end{bmatrix} = T(\mathbf{x})$$

Det betyr at T er ein lineær transformasjon.

$\boxed{27}$ **a)** A har 3 kolonner, men berre to rader. Altså er kolonnene lineært avhengige, og dermed er T ikkje 1-1 (Teorem 12 s. 77).

b) A har ein pivot-posisjon i kvar rad, altså spenner kolonnene i A ut $\mathbb{R}^2$ (Teorem 4 s. 37). Dermed er T på (Teorem 12).

Eksamensoppgåve

$\boxed{5}$ Lat a, b og c vera tal slik at

$$a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2 + c\mathbf{w}_3 = \mathbf{0}.$$

Me får då

$$a(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + b(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) + c(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{0}$$
$$a\mathbf{v}_1 + a\mathbf{v}_2 + b\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_3 + c\mathbf{v}_2 + c\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$
$$(a+b)\mathbf{v}_1 + (a+c)\mathbf{v}_2 + (b+c)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Sidan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er lineært uavhengig må me då ha

$$a + b = 0$$
$$a + c = 0$$
$$b + c = 0.$$

Den einaste løysinga til dette systemet er $a = b = c = 0$. Dette betyr at $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ er lineært uavhengig.