Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Løysingsforslag – Øving 7

Oppgåver frå læreboka, s. 55

13 **a)** Me set opp ei likning for kvar node:

$$A: x_2 + 30 = x_1 + 80 \Rightarrow x_1 - x_2 = -50$$

$$B: x_3 + x_5 = x_2 + x_4 \Rightarrow x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0$$

$$C: x_6 + 100 = x_5 + 40 \Rightarrow x_5 - x_6 = 60$$

$$D: x_4 + 40 = x_6 + 90 \Rightarrow x_4 - x_6 = 50$$

$$E: x_1 + 60 = x_3 + 20 \Rightarrow x_1 - x_3 = -40$$

Me radreduserer den utvida matrisa til dette systemet:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 50 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -40 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Systemet har to frie variablar s og t, og den generelle løysinga er

$$x_1 = s - 40$$

$$x_2 = s + 10$$

$$x_3 = s$$

$$x_4 = t + 50$$

$$x_5 = t + 60$$

$$x_6 = t$$

b) Sidan x_1 og x_6 må vera positive har me $s \geq 40$ og $t \geq 0$. Dermed får me $x_2 \geq 50$, $x_3 \geq 40$, $x_4 \geq 50$ og $x_5 \geq 60$.

Oppgåver frå læreboka, s. 61

34 Usant. Lat $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ og $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 0, 0)$ (eller ein annan ikkje-null vektor). Då er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ lineært avhengig, sidan den inneheld $\mathbf{0}$, men $\mathbf{v}_2$ er ikkje ein multippel av $\mathbf{v}_1$.

35 Sant. Ei mengd som inne held $\mathbf{0}$ er alltid lineært avhengig.

Oppgåver frå læreboka, s. 68-70

11 $\mathbf{b}$ ligg i bildet til lineærtransformasjonen representert ved A viss og berre viss likningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

har ei løysing. Me radreduserer den utvida matrisa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Systemet er konsistent, altså ligg $\mathbf{b}$ i bildet.

37 Me skal finna alle løysingar til $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, det vil seia $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Me radreduserer $[A|\mathbf{0}]$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -5 & 0 \\ -7 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ -9 & 3 & -6 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Systemet har ein fri variabel s, og den generelle løysinga er

$$x_1 = -s$$

$$x_2 = -s$$

$$x_3 = s$$

$$x_4 = 0$$

Altså har me $T(\mathbf{x}) = 0$ når

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Oppgåver frå læreboka, s. 78

10 Me finn først $T(\mathbf{e}_1)$ og $T(\mathbf{e}_2)$. $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ ligg i ro når me speglar om x_1-aksen, og vert så sendt til $(0, 1)$ når me speglar om $x_1 = x_2$. Altså får me $T(\mathbf{e}_1) = (0, 1)$. $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ vert sendt til $(0, -1)$ når me speglar om x_1-aksen, som så vert sendt til $(-1, 0)$ når me speglar om $x_1 = x_2$. Altså får me $T(\mathbf{e}_2) = (-1, 0)$.

Dermed vert standardmatrisa til T

$$[T(\mathbf{e}_1)|T(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

12 T sender $\mathbf{e}_1$ til $\mathbf{e}_2$ og $\mathbf{e}_2$ til $-\mathbf{e}_1$. Dette er det same som å rotera $\frac{\pi}{2}$ mot klokka. Kall denne rotasjonen $R_{\frac{\pi}{2}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Rotasjonar er også lineære transformasjonar, og ein lineær transformasjon er fullstendig bestemt av korleis den verkar på einheitsvektorane. Derfor medfører $T(\mathbf{e}_1) = R_{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{e}_1)$ og $T(\mathbf{e}_2) = R_{\frac{\pi}{2}}(\mathbf{e}_2)$ at $T = R_{\frac{\pi}{2}}$. Altså er T ein rotasjon.

Oppgåver frå læreboka, s. 86-87

$\boxed{5}$ Me set opp ei likning for kvar løkke:

$$1 : (4+1+1)I_1 + 5(I_1 - I_2) = 20 + 30 \Rightarrow 11I_1 - 5I_2 = 50$$

$$2 : (3+1)I_2 + 5(I_2 - I_1) + 1(I_2 - I_3) = -10 - 30 \Rightarrow -5I_1 + 10I_2 - I_3 = -40$$

$$3 : (4+2)I_3 + 1(I_3 - I_2) + 2(I_3 - I_4) = 10 + 20 \Rightarrow -I_2 + 9I_3 - 2I_4 = 30$$

$$4 : (1+4+3)I_4 + 2(I_4 - I_3) = -20 - 10 \Rightarrow -2I_3 + 10I_4 = -30$$

På matriseform vert dette

$$\begin{bmatrix} 11 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ -40 \\ 30 \\ -30 \end{bmatrix}.$$

Me løyser likninga i MATLAB, t.d. ved å skriva

```
>>linsolve([11,-5,0,0;-5,10,-1,0;0,-1,9,-2;0,0,-2,10],[50;-40;30;-30])
```

og får

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}6806 \\ -1{,}9028 \\ 2{,}5694 \\ -2{,}4861 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{12}$ Fordelinga på måndag kan skrivast som

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 295 \\ 55 \\ 150 \end{bmatrix}.$$

For å finna fordelinga ein dag seinare gangar me med matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}97 & 0{,}05 & 0{,}10 \\ 0{,}00 & 0{,}90 & 0{,}05 \\ 0{,}03 & 0{,}05 & 0{,}85 \end{bmatrix}.$$

Altså vert fordelinga på tysdag

$$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 303{,}9 \\ 57 \\ 139{,}1 \end{bmatrix},$$

og på onsdag

$$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 311{,}54 \\ 58{,}25 \\ 130{,}2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 312 \\ 58 \\ 130 \end{bmatrix}$$

Oppgåver frå læreboka, s. 89

$\boxed{14}$ Vektorane er lineært uavhengige når likninga

$$\begin{bmatrix}1\\a\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}a\\a+2\end{bmatrix}$$

ikkje har noko løysing. Me radreduserer den utvida matrisa.

$$\begin{bmatrix}1 & a\\a & a+2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & a\\0 & a^2-a-2\end{bmatrix}$$

Me ser at systemet er konsistent viss og berre viss $a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1, a = 2$. Altså er vektorane lineært uavhengige for alle verdiar av a unnateke -1 og 2.

$\boxed{16}$ Nummerer kolonnevektorane slik at $A = [\mathbf{v}_4|\mathbf{v}_3|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_1]$. Då har me $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$. Vidare finst det for kvar vektor $\mathbf{v}_i$ ei rad der $\mathbf{v}_i$ har eit tal ulikt 0, medan alle tidlegare vektorar har 0. Det betyr at ingen av vektorane er ein lineærkombinasjon av tidlegare vektorar. I følgje Teorem 7 er då kolonnene lineært uavhengige.

Oppgåver frå læreboka, s. 100-101

$\boxed{11}$

$$AD = \begin{bmatrix}5 & 6 & 6\\10 & 12 & 10\\15 & 15 & 12\end{bmatrix}, \qquad DA = \begin{bmatrix}5 & 10 & 15\\6 & 12 & 15\\6 & 10 & 12\end{bmatrix}$$

Når me gangar med D frå høgre gangar me kolonnene med høvesvis 5, 3 og 2. Når me gangar med D frå venstre gjer me det same med radene.

B kan til dømes vera

$$B = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

$\boxed{23}$ Lat $\mathbf{x}_1$ vera ei løysing av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Då har me

$$\begin{aligned}CA\mathbf{x}_1 &= C\mathbf{0}\\ I_n\mathbf{x}_1 &= \mathbf{0}\\ \mathbf{x}_1 &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Altså har $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ berre den trivielle løysinga.

Det betyr at A har ein pivot i kvar kolonne. Sidan me berre kan ha ein pivot i kvar rad må A ha minst like mange rader som kolonner.

$\boxed{25}$ Me har vist i oppgåve 23 at

$$CA = I_n \Rightarrow m \geq n.$$

På tilsvarande måte kan me visa at

$$AD = I_m \Rightarrow m \leq n.$$

Dermed har me $m = n$.

Vidare har me

$$C = CI_n = C(AD) = (CA)D = I_nD = D.$$

Eksamensoppgåve, desember 2006

$\boxed{4}$ Me lagar ei likning for kvart kryss:

$$x_1 + 470 = x2 + 440 \Rightarrow x_1 - x_2 = -30$$

$$x_4 + 540 = x1 + 420 \Rightarrow x_1 - x_4 = 120$$

$$x_2 + 450 = x_3 + 550 \Rightarrow x_2 - x_3 = 100$$

$$x_3 + 380 = x_4 + 430 \Rightarrow x_3 - x_4 = 50$$

På matriseform vert det

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -30 \\ 120 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

Me radreduserer den utvida matrisa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -30 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 120 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 50 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 120 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Systemet har ein fri variabel s og den generelle løysinga er

$$x_1 = 120 + s$$

$$x_2 = 150 + s$$

$$x_3 = 50 + s$$

$$x_4 = s.$$

Viss $s = x_4 = 0$ får me då

$$x_1 = 120$$

$$x_2 = 150$$

$$x_3 = 50.$$