Oppgåver frå læreboka kap. 2.1, s. 100-101

27

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u} = -3a + 2b - 5c$$

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} -3a & -3b & -3c \\ 2a & 2b & 2c \\ -5a & -5b & -5c \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} -3a & 2a & -5a \\ -3b & 2b & -5b \\ -3c & 2c & -5c \end{bmatrix}$$

28 Sidan $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ er ei 1×1-matrise har me $\mathbf{u}^T\mathbf{v} = (\mathbf{u}^T\mathbf{v})^T$. Ved hjelp av Teorem 3 får me vidare

$$\mathbf{u}^T\mathbf{v} = (\mathbf{u}^T\mathbf{v})^T = \mathbf{v}^T(\mathbf{u}^T)^T = \mathbf{v}^T\mathbf{u}.$$

For ytreproduktet har me

$$(\mathbf{u}\mathbf{v}^T)^T = (\mathbf{v}^T)^T\mathbf{u}^T = \mathbf{v}\mathbf{u}^T.$$

40

$$S^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad S^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad S^5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S^6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oppgåver frå læreboka kap. 2.2, s. 109-110

3 Me finn inversen ved hjelp av Teorem 4:

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7\cdot(-3)-3\cdot(-6)} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}$$

6 Lat

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}.$$

Då vert likningssystemet

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -6 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -15 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

7 **a)**

$$A^{-1} = \frac{1}{1\cdot 12 - 2\cdot 5} \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 \Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2 \Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_3 \Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_4 \Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 12 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -5 \end{bmatrix}$$

b) Me radreduserer den utvida matrisa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 12 & 3 & -5 & 6 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 11 & 6 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Me ser at dette gir dei same løysingane som i a).

9 **a)** Sant, per definisjon.

b) Usant. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. For å sjå at $A^{-1}B^{-1}$ er feil, lat til dømes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Usant. Viss $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ så har me $ab - cd = 1$, men A er ikkje inverterbar.

d) Sant. Når A er inverterbar vil $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vil alltid ha løysinga $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

e) Sant (sjå s. 106-107).

13 A er inverterbar, altså eksisterer A^{-1}. Me gangar begge sider av likninga med A^{-1}:

$$AB = AC$$

$$A^{-1}AB = A^{-1}AC$$

$$I_nB = I_nC$$

$$B = C$$

Dette gjeld ikkje generelt, til dømes held $AB = AC$ for

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

16 Me har

$$A = AI = A(BB^{-1}) = (AB)B^{-1}.$$

Altså er A eit produkt av inverterbare matriser, og dermed inverterbar.

31 Me radreduserer den utvida matrisa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Me får altså at

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

33 Me radreduserer dei utvida matrisene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Altså har me

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Det er då rimeleg å gjetta at

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Me skal så visa at $AB = I$. Lat $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{b}_j$ og $\mathbf{e}_j$ vera j-te kolonne i høvesvis A, B og I. Me treng å visa at $A\mathbf{b}_j = \mathbf{e}_j$ for alle j der $1 \leq j \leq n$. Merk at når $1 \leq j < n$ har me $\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_{j+1} = \mathbf{e}_j$ og $\mathbf{b}_j = \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{j+1}$. Dermed får me

$$A\mathbf{b}_j = A(\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{j+1}) = A\mathbf{e}_j - A\mathbf{e}_{j+1} = \mathbf{a}_j - \mathbf{a}_{j+1} = \mathbf{e}_j.$$

Då gjenstår det berre å sjekka at $A\mathbf{b}_n = \mathbf{e}_n$. Her har me at $\mathbf{a}_n = \mathbf{b}_n = \mathbf{e}_n$, og dermed

$$A\mathbf{b}_n = A\mathbf{e}_n = \mathbf{a}_n = \mathbf{e}_n.$$

Altså har me $AB = I$.

Oppgåver frå læreboka kap. 2.3, s. 115-116

7 Me reduserer matrisa:

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 & -3 \\ 0 & -\frac{8}{3} & \frac{25}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Me ser at den reduserte matrisa har 4 pivotar, altså er både den og den opphavelege matrisa inverterbare.

8 Matrisa er 4×4 og har 4 pivotar, altså er den inverterbar.

15 Nei, at kolonnene spenner ut $\mathbb{R}^4$ er ekvivalent med at matrisa er inverterbar.

17 Viss to kolonner er like, så er kolonnene lineært avhengige. Altså er matrisa ikkje inverterbar.

33 Me finn først standardmatrisa til T:

$$A = [T(\mathbf{e}_1)|T(\mathbf{e}_2)] = \begin{bmatrix} -5 & 9 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}.$$

Så inverterer me A:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -7 & -9 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sidan A er inverterbar er også T inverterbar, og me har

$$T^{-1}(x_1, x_2) = A^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (7x_1 + 9x_2, 4x_1 + 5x_2).$$