Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Løysingsforslag – Øving 9

Oppgåver frå læreboka kap. 2, s. 160

3

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(I-A)(I+A+A^2) = II+IA+IA^2-AI-AA-AA^2 = I+A+A^2-A-A^2-A^3 = I$$

4 Inspirert av oppgåve 3 gjettar me på at

$$(I-A)^{-1} = I + \sum_{i=1}^{n-1} A^i.$$

Så sjekkar me at dette er ein invers til $I-A$.

$$(I-A)(I+\sum_{i=1}^{n-1} A^i) = I + \sum_{i=1}^{n-1} A^i - A - A \cdot \sum_{i=1}^{n-1} A^i = I + \sum_{i=1}^{n-1} A^i - A - \sum_{i=1}^{n-1} A^{i+1}$$

$$= I + \sum_{i=1}^{n-1} A^i - A - \sum_{i=2}^{n} A^i = I + \sum_{i=1}^{n-1} A^i - \sum_{i=1}^{n-1} A^i - A^n = I$$

9 Me finn først B^{-1}:

$$B^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Så finn me A:

$$A = ABB^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 13 \\ -8 & 27 \end{bmatrix}$$

10 Viss A er inverterbar, så er også A^T inverterbar (Teorem 6c). Då er A^TA eit produkt av inverterbare matriser, og er dermed inverterbar (Teorem 6b).

Altså har me

$$I = (A^TA)^{-1}A^TA.$$

Me gangar begge sider med A^{-1} frå høgre, og får

$$A^{-1} = (A^TA)^{-1}A^TAA^{-1} = (A^TA)^{-1}A^T.$$

Oppgåver frå læreboka kap. 3.1, s. 167-168

3 Kofaktorutvikling langs første rad:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (-4)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-9)-(-4)(-5)+3\cdot 11 = -5$$

Kofaktorutvikling langs andre kolonne:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -(-4)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\cdot(-5)+1\cdot(-5)-4\cdot(-5) = -5$$

10 Me utviklar først langs andre rad,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & -7 & 5 \\ 5 & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -6 & 5 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \dots$$

deretter langs tredje rad.

$$\dots = -3(5\cdot\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} + 4\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}) = -3(5\cdot 2 + 4(-2)) = -6$$

27

$$\begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = k\cdot\det(I_2) = k$$

29

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot\det(I_2) = -1$$

36 Me har $\det(A) = ad - bc$ og $\det(E) = 1$.

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ ka+c & kb+d \end{bmatrix}$$

$\det(EA) = a(kb+d) - b(ka+c) = kab + ad - kab - bc = ad - bc = \det(E)\cdot\det(A)$

Oppgåver frå læreboka kap. 3.2, s. 175-176

8

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -3 & -7 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\boxed{17}$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -7$$

$\boxed{24}$

$$\begin{vmatrix} 4 & -7 & -3 \\ 6 & 0 & -5 \\ -7 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - (-5) \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} = (-6)(-36) + 5(-41) = 11 \neq 0$$

Altså er matrisa inverterbar (Teorem 4), og dermed er kolonnene lineært uavhengige.

$\boxed{32}$

$$\det(rA) = \det(rIA) = \det(rI)\det(A) = \begin{vmatrix} r & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & r & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & r & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r \end{vmatrix} \det(A) = r^n \det(A)$$

$\boxed{35}$ Ved hjelp av Teorem 5 og 6 får me

$$\det(U^T U) = \det(U^T)\det(U) = \det(U)^2.$$

Dermed har me

$$U^T U = I \Rightarrow \det(U^T U) = \det(I) \Rightarrow \det(U)^2 = 1 \Rightarrow \det(U) = \pm 1.$$

$\boxed{42}$

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$$

$$\begin{vmatrix} 1+a & b \\ c & 1+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$(1+a)(1+d) - bc = 1 + (ad - bc)$$

$$a + d + 1 + ad - bc = 1 + ad - bc$$

$$a + d = 0$$