Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet Institutt for matematiske fag	TMA4110 Matematikk 3 Haust 2011 **Løysingsforslag – Øving 10**

Oppgåver frå læreboka kap. 3.3, s. 184-185

8 Me skriv systemet på matriseform:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3s & -5 \\ 9 & 5s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

Systemet har ei unik løysing når

$$\det(A) = 15s^2 + 45 \neq 0,$$

altså for alle reelle tal s. Cramers regel gir

$$x_1 = \frac{\det(A_1(\mathbf{b}))}{\det(A)} = \frac{1}{15s^2+45} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 5s \end{vmatrix} = \frac{15s+10}{15s^2+45}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2(\mathbf{b}))}{\det(A)} = \frac{1}{15s^2+45} \begin{vmatrix} 3s & 3 \\ 9 & 2 \end{vmatrix} = \frac{6s-18}{15s^2+45}.$$

18 Sidan $\det(A) = 1$ har me i følgje Teorem 8

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A).$$

Viss alle elementa i A er heiltal, så er alle elementa i $\operatorname{adj}(A)$ determinantar av heiltalsmatriser, og dermed heiltal.

27 Lat $B = [\mathbf{b}_1|\mathbf{b}_2]$. Då er arealet til S lik $|\det(B)|$ (Teorem 9), og arealet til bildet av S er $|\det(A)||\det(B)|$ (Teorem 10).

$$|\det(A)||\det(B)| = |12-6||-10+6| = 24$$

Oppgåver frå læreboka kap. 3, s. 187

19 Dei tre oppgitte matrisene har alle determinant 1. Me gjettar derfor at

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix} = 1.$$

For å bevisa dette radreduserer me matrisa. Me trekkjer først rad 1 frå kvar av dei andre radene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{bmatrix}$$

Deretter trekkjer me rad 2 frå kvar av radene under:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \end{bmatrix}$$

Me held fram slik og får til slutt

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Den siste matrisa er triangulær, dermed er determinanten lik produktet av elementa på diagonalen, altså 1. Dermed har også den opphavelege matrisa determinant 1.

Oppgåver frå læreboka kap. 4.1, s. 195-196

$\boxed{1}$ **a)** Lat $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ vera vektorar i V.Då har me $u_i \geq 0$ og $v_i \geq 0$, og dermed også $u_i + v_i \geq 0$. Altså er $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}$ også i V.

b) Lat til dømes $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $c = -1$. Då er $c\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ikkje med i V, og dermed er V ikkje eit vektorrom.

$\boxed{2}$ **a)** Lat $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in W$ og $c \in \mathbb{R}$. Då har me $u_1u_2 \geq 0$, og dermed $(cu_1)(cu_2) = c^2u_1u_2 \geq 0$. Altså er $c\mathbf{u}$ også i W.

b) Lat $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Då har me $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, men $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \notin W$. Altså er W ikkje eit vektorrom.

$\boxed{5}$ Den gitte mengda er Span$\{t^2\}$, så i følgje Teorem 1 er den eit underrom av $\mathbb{P}_n$ (for $n \geq 2$).

$\boxed{6}$ Nullvektoren i $\mathbb{P}_n$ kan ikkje skrivast på forma $a + t^2$, altså er dette ikkje eit underrom.

11 Me har at

$$\begin{bmatrix} 2b+3c \\ -b \\ 2c \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Altså får me $W = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$, og dermed er W eit underrom av $\mathbb{R}^3$ i følgje Teorem 1.

19 Lat $Y = \{y(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t | c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ vera mengda av funksjonar beskrive i likning (5), og lat $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vera mengda av alle funksjonar frå $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ er eit vektorrom (sjå eksempel 5 på side 192). Me har at $Y = \text{Span}\{\cos \omega t, \sin \omega t\}$, så i følgje Teorem 1 er Y eit underrom av $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, og dermed eit vektorrom.

Oppgåver frå læreboka kap. 4.2, s. 205-206

6 Me løyser systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Systemet har tre frie variablar s, t og u, og me har

$$\begin{aligned} x_5 &= u \\ x_4 &= t \\ x_3 &= s \\ x_2 &= 3s - t \\ x_1 &= -5s + 6t - u. \end{aligned}$$

Dermed kan den generelle løysinga skrivast som

$$\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

altså er løysingsmengda

$$\text{Null}\, A = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

24 Lat $\mathbf{a}_i$ vera $i$te kolonne i A. Då har me $\mathbf{w} = -\mathbf{a}_4$, altså ligg $\mathbf{w}$ i $\text{Col}\, A$. Vidare har me $A\mathbf{w} = \mathbf{0}$, altså ligg $\mathbf{w}$ også i $\text{Nul}\, A$.

30 Me treng å sjekka at bildet til T har dei tre eigenskapane i definisjonen på side 193.

a: $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, altså ligg nullvektoren i bildet.

b: Viss $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ ligg i bildet, så finst det vektorar $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ i V slik at $T(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$ og $T(\mathbf{y}) = \mathbf{v}$. Då har me $\mathbf{u} + \mathbf{v} = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) = T(\mathbf{x} + \mathbf{y})$, altså ligg $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ i bildet.

c: Viss $\mathbf{u}$ ligg i bildet, så finst det ein vektor $\mathbf{x}$ i V slik at $T(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$. Då har me for ein skalar c at $c\mathbf{u} = cT(\mathbf{x}) = T(c\mathbf{x})$, altså ligg $c\mathbf{u}$ i bildet.

Bildet til T oppfyller alle tre krava, altså er det eit underrom av W.

Oppgåver frå læreboka kap. 4.3, s. 213

$\boxed{13}$ For å finna ein basis for Nul A løyser me $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Systemet har to frie variablar s og t, og løysinga vert

$$\begin{aligned} x_4 &= t \\ x_3 &= s \\ x_2 &= -\frac{5}{2}s - \frac{3}{2}t \\ x_1 &= -6s - 5t. \end{aligned}$$

På vektorform vert det

$$\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} -6 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -5 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

altså er

$$\left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ -\frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ein basis for nullrommat til A.

Me ser at B har pivotar i første og andre kolonne, altså vil i følgje Teorem 6 første og andre kolonne i A vera ein basis for kolonnerommet:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$$

Oppgåver frå eksamen august 2008

$\boxed{3}$ Vi regner ut determinanten til A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & 4 & 0 \\ 4 & a & 3 \\ 0 & 3 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 3 \\ 3 & a \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & a \end{vmatrix} = a(a^2 - 25) = a(a-5)(a+5).$$

Siden A er inverterbar hvis og bare hvis determinanten til A er forskjellig fra 0, har vi at A er inverterbar hvis og bare hvis $a(a-5)(a+5) \neq 0$, dvs $a \neq 0, -5, 5$.