Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Løysingsforslag – Øving 11

Oppgåver frå læreboka kap. 4.3, s. 214-215

16 Me radreduserer matrisa $M = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3|\mathbf{v}_4|\mathbf{v}_5]$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & -4 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Me har pivotar i dei tre første kolonnene, altså er dei tre første kolonnene i M ein basis for kolonnerommet til M. Det vil seia at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er ein basis for $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$.

31 Viss $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ er lineært avhengig, så finst det reelle tal $a_1, \dots, a_p$ slik at

$$a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}.$$

Me brukar T på begge sider av likninga:

$$T(a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_p\mathbf{v}_p) = T(\mathbf{0})$$

$$a_1T(\mathbf{v}_1) + \dots + a_pT(\mathbf{v}_p) = 0$$

Dette viser at $\{T(\mathbf{v}_1), \dots, T(\mathbf{v}_p)\}$ også er lineært avhengig.

Oppgåver frå læreboka kap. 4.5, s. 229

6 **a)** Me har

$$\begin{bmatrix} 3a - c \\ -b - 3c \\ -7a + 6b + 5c \\ -3a + c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

altså er underrommet me ser på

$$\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \text{Col} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ -7 & 6 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Me radreduserer:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ -7 & 6 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sidan me har pivotar i alle tre kolonner er

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -7 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ein basis.

b) Basisen har tre element, altså er rommet tredimensjonalt.

$\boxed{7}$ **a)** Me set likningane som beskriv rommet på matriseform:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Rommet me ser på er altså $\operatorname{Null} A$. Me radreduserer den utvida matrisa:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Me ser at systemet berre har den trivielle løysinga, altså er $\operatorname{Null} A = \{\mathbf{0}\}$, som ikkje har nokon basis.

b) Rommet har dimensjon 0.

$\boxed{14}$ A har 4 pivotar, altså har $\operatorname{Col} A$ dimensjon 4. Likninga $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har 3 frie variablar, altså har $\operatorname{Null} A$ dimensjon 3.

$\boxed{16}$ Me radreduserer A:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Me har to pivotar, så $\operatorname{Col} A$ har dimensjon 2. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har berre den trivielle løysinga, så $\operatorname{Null} A$ har dimensjon 0.

$\boxed{19}$ **a)** Sant. Pivotkolonnene utgjer ein basis for kolonnerommet (Teorem 6).

b) Usant. Eit plan er eit underrom viss og berre viss det går gjennom origo.

c) Usant. $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$ er ein basis for $\mathbb{P}_4$ (sjå eksempel 6, side 209), altså er $\mathbb{P}_4$ 5-dimensjonalt.

d) Usant. Dette held berre viss S også har nøyaktig n element.

e) Sant. I følgje Teorem 5 finst det ei undermengd av $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ som er ein basis for V. Altså har me $\dim V \leq p$. Ifølgje Teorem 9 må då T vera lineært avhengig.

Oppgåver frå læreboka kap. 4.6, s. 236-237

$\boxed{3}$ Rangen til A er 3, og Teorem 14 gir då at dimensjonen til Null A er 3.

Kolonnerommet har basis

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dei tre første radene i B utgjer ein basis for radrommet:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -6 \\ 6 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

For å finna ein basis for nullrommet løyser me $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Systemet har tre frie variablar s, t og u og me får

$$x_6 = u, \qquad x_5 = 0, \qquad x_4 = t$$

$$x_3 = s, \qquad x_2 = -t, \qquad x_1 = 3s - 3u$$

eller

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Altså er

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ein basis for nullrommet.

$\boxed{6}$ Teorem 14 gir at

$$\dim \operatorname{Null} A = n - \operatorname{rank} A = 5 - 2 = 3,$$

$$\operatorname{rank} A^T = \dim \operatorname{Row} A = \operatorname{rank} A = 2.$$

$\boxed{13}$ Me kan ha maksimalt ein pivot i kvar kolonne, og maksimalt ein pivot i kvar rad. Altså kan A maksimalt ha rang 5 i begge tilfella.

$\boxed{16}$ A kan maksimalt ha rang 5, så den minste mulege dimensjonen til nullrommet blir $n - 5 = 5 - 5 = 0$.

19 Ja. Eit system med 5 likningar og 6 ukjende kan skrivast som $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der A er ei 5×6-matrise og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$. Systemet me ser på er homogent, det vil seia at høgresida er $\mathbf{0}$. Altså har me systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, og løysingane til systemet utgjer $\operatorname{Null} A$. Det finst (minst) ein løysing ulik null, kall denne $\mathbf{v}$. Alle andre løysingar er multiplum av $\mathbf{v}$, det vil seia at dei kan skrivast som $c\mathbf{v}$ for eit reelt tal c. Dette betyr at $\{\mathbf{v}\}$ er ein basis for $\operatorname{Null} A$, og dermed har me $\dim \operatorname{Null} A = 1$.

Då gir Teorem 14 at A har rang 5. $\operatorname{Col} A$ er altså eit 5-dimensjonalt underrom av $\mathbb{R}^5$, det vil seia at $\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^5$. Systemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har ei løysing viss og berre viss $\mathbf{b} \in \operatorname{Col} A$ (sjå s. 201-202 i læreboka). Altså kan me løysa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for ein kvar $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$.

Oppgåver frå læreboka kap. 4, s. 263

4 t er ein variabel, ikkje ein skalar. For at $\{\mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ skal vera lineært avhengig må me ha $\mathbf{g}(t) = a\mathbf{f}(t)$ (eller $\mathbf{f}(t) = a\mathbf{g}(t)$) der $a \in \mathbb{R}$ er ein konstant.

13 Frå oppgåve 12 veit me at rangen til eit produkt er mindre eller lik rangen til kvar av faktorane. Det betyr for det første at $\operatorname{rank} PA \leq \operatorname{rank} A$. For det andre har me at $A = P^{-1}(PA)$ og dermed har me på same måte at $\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} PA$. Til saman gir det at $\operatorname{rank} PA = \operatorname{rank} A$.

Oppgåver frå eksamen august 2011

4 Me radreduserer A:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -3 & -3 & -4 \\ 4 & -6 & 9 & 5 & 9 \\ -2 & 3 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B.$$

a) Me løyser likningssystemet $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Systemet har to frie variablar s og t, og løysinga vert

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dette gir ein basis for $\operatorname{Null}(A)$:

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{9}{2} \\ 0 \\ -\frac{4}{3} \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Dei tre første radene i B utgjer ein basis for $\operatorname{Row}(A)$:

$$\{[1, -\frac{3}{2}, 0, 0, -\frac{9}{2}], [0, 0, 1, 0, \frac{4}{3}], [0, 0, 0, 1, 3]\}.$$

b) Pivotkolonnene utgjer ein basis for $\mathrm{Col}(A)$:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\mathrm{rang}(A) = \dim \mathrm{Col}(A) = \dim \mathrm{Row}(A) = 3.$

$\boxed{5}$ **a)** A er invertibel når $\det A \neq 0$.

$$\det A = a(3 \cdot 9 - 7 \cdot 2) - b(1 \cdot 9 - 2 \cdot 2) + c(1 \cdot 7 - 2 \cdot 3) = 13a - 5b + c$$

Altså er A invertibel når $13a - 5b + c \neq 0$.

b) Frå Teorem 8 i kapittel 3 har me at $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$. Tala i $\operatorname{adj} A$ er determinantar av undermatriser av A, så viss A er ei heiltalsmatrise blir også $\operatorname{adj} A$ ei heiltalsmatrise. Dermed blir A^{-1} ei heiltalsmatrise viss a, b og c er heiltal og $\det A = 1$. Det skjer til dømes viss

$$a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = 1.$$