Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

TMA4110
Matematikk 3
Haust 2011

Løysingsforslag – Øving 12

Oppgåver frå læreboka kap. 5.1, s. 271-273

$\boxed{15}$ Eigenrommet som svarar til $\lambda = -5$ er det same som løysingsrommet til

$$A\mathbf{x} = -5\mathbf{x} \Rightarrow (A + 5I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Me radreduserer den utvida matrisa.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Systemet har to frie variablar s og t, og løysinga vert

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Altså er

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ein basis for eigenrommet.

$\boxed{25}$ Me har at λ er ein eigenverdi til A, og A er inverterbar. Då er $\lambda \neq 0$, så λ^{-1} eksisterer. Vidare finst det ein vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ slik at

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x} \Rightarrow \lambda^{-1}\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x}.$$

Altså er λ^{-1} ein eigenverdi for A^{-1}.

$\boxed{26}$ Lat λ vera ein eigenverdi for A. Då finst ein vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ slik at

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow A^2\mathbf{x} = A\lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{0} = \lambda A\mathbf{x},$$

sidan $A^2 = 0$. Me set inn $\lambda\mathbf{x} = A\mathbf{x}$:

$$\lambda A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Sidan $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ betyr dette at

$$\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0.$$

29 For ei kvar matrise B har me at

$$B\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_m\end{bmatrix}$$

der u_i er summen av $i$te rad. For A har me då

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s\\s\\\vdots\\s\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix},$$

altså er s ein eigenverdi for A.

Oppgåver frå læreboka kap. 5.2, s. 279-281

4 Det karakteristiske polynomet er

$$\det\begin{bmatrix}8-\lambda & 2\\3 & 3-\lambda\end{bmatrix} = (8-\lambda)(3-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 11\lambda + 18.$$

For å finna eigenverdiane løyser me

$$\lambda^2 - 11\lambda + 18 = 0$$

$$\lambda_1 = 9, \qquad \lambda_2 = 2.$$

13 Det karakteristiske polynomet er

$$\det\begin{bmatrix}6-\lambda & -2 & 0\\-2 & 9-\lambda & 0\\5 & 8 & 3-\lambda\end{bmatrix} = (3-\lambda)((6-\lambda)(9-\lambda)-4) = -\lambda^3 + 18\lambda^2 - 95\lambda + 150.$$

25 **a)** Me finn først eigenverdiane til A:

$$\det\begin{bmatrix}0{,}6-\lambda & 0{,}3\\0{,}4 & 0{,}7-\lambda\end{bmatrix} = \lambda^2 - 1{,}3\lambda + 0{,}3 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 0{,}3$$

Me har at $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$, så me må finna ein eigenvektor til den andre eigenverdien, altså løysa $(A - 0{,}3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Me radreduserer

$$\begin{bmatrix}0{,}3 & 0{,}3 & 0\\0{,}4 & 0{,}4 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ er ei løysing, og dermed ein eigenvektor. Me set $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$, og har då at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er ein basis for $\mathbb{R}^2$.

b)

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_1 + (-\frac{1}{14})\mathbf{v}_2$$

c) Me har

$$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0 = A\mathbf{v}_1 + A(-\frac{1}{14})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + (-\frac{1}{14}) \cdot 0{,}3\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_0 = A\mathbf{v}_1 + A(-\frac{1}{14}) \cdot 0{,}3\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + (-\frac{1}{14}) \cdot 0{,}3^2\mathbf{v}_2$$

Me kan visa (ved induksjon) at

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{v}_1 + (-\frac{1}{14}) \cdot 0{,}3^k\mathbf{v}_2.$$

Når k veks vil det siste leddet gå mot 0, så

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{v}_1.$$

Oppgåver frå læreboka kap. 5.3, s. 286-287

$\boxed{13}$ Me finn først eigenrommet som svarar til $\lambda = 1$, som er nullrommet til $(A - I)$.

$$(A - I) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Likninga $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har to frie variablar, og generell løysing

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Altså er

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ein basis for eigenrommet.

På same måte finn me eigenrommet som svarar til $\lambda = 5$.

$$(A - 5I) = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Likninga $(A - 5I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har ein fri variabel, og generell løysing

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Altså er

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ein basis for eigenrommet.

Dermed har me tre lineært uavhengige eigenvektorar, og Teorem 5 gir at $A = PDP^{-1}$ for

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

16 Her er 0 den einaste eigenverdien, så viss matrisa er diagonaliserbar får me

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og det stemmer ikkje. Altså er matrisa ikkje diagonaliserbar.

27 Sidan A er inverterbar er alle eigenverdiane ulik 0. Dermed er D inverterbar og me har

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad D^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix},$$

altså er D^{-1} også diagonal. Me har vidare at

$$A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1} = PD^{-1}P^{-1},$$

altså er A^{-1} diagonaliserbar.

Oppgåver frå læreboka kap. 5.5, s. 300-301

4 Kall den gitte matrisa A. Me finn først eigenverdiane til A:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = 2 \pm i$$

Me finn så ein basis for eigenrommet som svarar til $\lambda = 2 + i$.

$$(A - (2+i)I) = \begin{bmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Likninga $(A - (2+i)I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har ei løysing $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1-i \\ -1 \end{bmatrix}$, og $\{\mathbf{x}_1\}$ er då ein basis for eigenrommet.

Vidare har eigenrommet som svarar til $\lambda = 2-i$ ein basis $\{\mathbf{x}_2\}$ der $\mathbf{x}_2 = \overline{\mathbf{x}_1} = \begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \end{bmatrix}$.

13 Me har frå oppgåve 4 at A har ein eigenverdi $\lambda = 2 - i$ med tilhøyrande eigenvektor $\begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \end{bmatrix}$. Teorem 9 gir då at $A = PCP^{-1}$ for

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Oppgåver frå læreboka kap. 5.7, s. 318

$\boxed{2}$ Likninga $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ har generell løysing

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{-3t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{-t}\mathbf{v}_2.$$

Initialvilkåra gir

$$\mathbf{x}(0) = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Me radreduserer den utvida matrisa:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Me får at $c_2 = \frac{5}{2}$ og $c_1 = \frac{1}{2}$, så

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2}e^{-3t}\mathbf{v}_1 + \frac{5}{2}e^{-t}\mathbf{v}_2.$$

$\boxed{11}$ Me finn først eigenverdiane til A.

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 9 = 0$$
$$\lambda = \pm 3i$$

Me finn ein eigenvektor som høyrer til $\lambda_1 = 3i$.

$$A - 3iI = \begin{bmatrix} -3-3i & -9 \\ 2 & 3-3i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 3-3i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Likninga $(A - 3iI)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ har altså ei løysing $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3+3i \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_1$ er dermed ein eigenvektor. $\lambda_2 = -3i$ har då ein eigenvektor $\mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}_1} = \begin{bmatrix} -3-3i \\ 2 \end{bmatrix}$.

Den generelle komplekse løysinga av $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ vert då

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{3it}\begin{bmatrix} -3+3i \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3it}\begin{bmatrix} -3-3i \\ 2 \end{bmatrix}$$

der $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Den generelle reelle løysinga vert

$$\mathbf{x}(t) = r_1 \operatorname{Re}(e^{3it}\mathbf{v}_1) + r_2 \operatorname{Im}(e^{3it}\mathbf{v}_1)$$

der $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Me kan skriva om dette ved hjelp av

$$\begin{aligned} e^{3it}\mathbf{v}_1 = e^{3it}\begin{bmatrix} -3+3i \\ 2 \end{bmatrix} &= (\cos(3t) + i\sin(3t))\begin{bmatrix} -3+3i \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3\cos(3t) - 3\sin(3t) - 3i\sin(3t) + 3i\cos(3t) \\ 2\cos(3t) + 2i\sin(3t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3\cos(3t) - 3\sin(3t) \\ 2\cos(3t) \end{bmatrix} + i\begin{bmatrix} 3\cos(3t) - 3\sin(3t) \\ 2\sin(3t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Me får då

$$\mathbf{x}(t) = r_1\begin{bmatrix} -3\cos(3t) - 3\sin(3t) \\ 2\cos(3t) \end{bmatrix} + r_2\begin{bmatrix} 3\cos(3t) - 3\sin(3t) \\ 2\sin(3t) \end{bmatrix}.$$

Sidan eigenverdiane til A ikkje har nokon reell del vil banene bli ellipsar.

Oppgåver frå eksamen desember 2008

$\boxed{5}$ **a)** Me finn først eigenverdiane til A.

$$\det(A - \lambda I) = (7 - \lambda)(9 - \lambda) - 3 = \lambda^2 - 16\lambda + 60 = 0$$

$$\lambda_1 = 10, \qquad \lambda_2 = 6$$

A er ei 2×2-matrise med to distinkte eigenverdiar, så kvar av dei vil ha eit 1-dimensjonalt eigenrom.

Me finn ein eigenvektor til λ_1 ved å løysa likninga $(A - 10I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$mathbfx_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ er ei løysing, og dermed ein eigenvektor.

Me finn så ein eigenvektor til λ_2 ved å løysa likninga $(A - 6I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er ei løysing, og dermed ein eigenvektor.

Me har $A\mathbf{x}_1 = 10\mathbf{x}_1 \Rightarrow kA\mathbf{x}_1 = 10k\mathbf{x}_1$, altså er $10k$ ein eigenverdi for kA, med tilsvarande eigenvektor $\mathbf{x}_1$. På same måte får me at $6k$ er ein eigenverdi med eigenvektor $\mathbf{x}_2$.

b) Lat $\mathbf{v}_0 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dette er tilstandsvektoren no, første rad er andelen som har tohjulstrekk, andre rad er andelen som har firehjulstrekk. Tilstanden etter n år har då formelen $\mathbf{v}_n = (\frac{1}{10}A)^n \mathbf{v}_0$. Viss me har MATLAB tilgjengeleg kan me lett rekna ut dette direkte. Viss ikkje er det ein fordel å diagonalisera $\frac{1}{10}A$ først (sjå ex. 2 s.282). Frå a) har me at $\frac{1}{10}A$ har eigenverdiar 1 og $\frac{3}{5}$ med eigenvektorar $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$. Me set

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Då har me $\frac{1}{10}A = PDP^{-1}$, og dermed

$$\mathbf{v}_1 0 = (\frac{1}{10}A)^1 0\mathbf{v}_0 = PD^{10}P^{-1}\mathbf{v}_0 = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{3}{5})^{10} \end{bmatrix} P^{-1}\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 0{,}253 \\ 0{,}747 \end{bmatrix}.$$

Altså har 74,7% av bilane firehjulstrekk etter 10 år.