Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Løysingsforslag – Øving 13

Oppgåver frå læreboka kap. 6.1, s. 337

23

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 2\cdot(-7) + (-5)\cdot(-4) + (-1)\cdot 6 = 0$$
$$\|\mathbf{u}\|^2 = 2^2 + (-5)^2 + (-1)^2 = 30$$
$$\|\mathbf{v}\|^2 = (-7)^2 + (-4)^2 + 6^2 = 101$$
$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = (-5)^2 + (-9)^2 + 5^2 = 131$$

Me ser at $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er ortogonale, og at $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2$. Dette stemmer med Pytagoras' teorem.

27 Me har $\mathbf{y}$ er ortogonal med både $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Det betyr at $\mathbf{y}\cdot\mathbf{u} = 0$ og $\mathbf{y}\cdot\mathbf{v} = 0$. Teorem 1 gir då at $\mathbf{y}\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{y}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{v} = 0$, altså er $\mathbf{y}$ ortogonal med $\mathbf{u}+\mathbf{v}$.

Oppgåver frå læreboka kap. 6.2, s. 345

16 Me finn først $\hat{\mathbf{y}}$, den ortogonale projeksjonen av $\mathbf{y}$ på linja gjennom $\mathbf{u}$ og origo.

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\mathbf{u} = \frac{(-3)\cdot 1 + 9\cdot 2}{1^2+2^2}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}$$

Då har me at avstanden frå $\mathbf{y}$ til linja er

$$\|\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}}\| = \left\|\begin{bmatrix}-6\\3\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

17 Me har

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix} = 0,$$

så mengda er ortogonal. Men

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix} = \frac{1}{2},$$

så den er ikkje ortonormal. Dei normaliserte vektorane vert

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

$\boxed{28}$ U er ortogonal, så Teorem 6 gir at $U^TU = I$, altså er $U^{-1} = U^T$. Då har me også at $(U^T)^TU^T = UU^T = I$ så Teorem 6 gir at U^T også er ortogonal. Altså vil radene i U, som er det same som kolonnene i U^T, utgjera ein ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$.

Oppgåver frå læreboka kap. 6.3, s. 352-353

$\boxed{4}$ $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 0$, altså er $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ei ortogonal mengd. Projeksjonen av $\mathbf{y}$ på denne mengda vert

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 = \frac{6\cdot 3 + 3\cdot 4}{3^2+4^2}\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix} + \frac{6\cdot(-4)+3\cdot 3}{(-4)^2+3^2}\begin{bmatrix}-4\\3\\0\end{bmatrix} = \frac{6}{5}\begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix} - \frac{3}{5}\begin{bmatrix}-4\\3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\3\\0\end{bmatrix}.$$

$\boxed{1}$ $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, altså er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ei ortogonal mengd. Det næraste punktet til $\mathbf{y}$ i W er projeksjonen av $\mathbf{y}$ på W.

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{y}\cdot\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\1\\-1\\1\end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}.$$

$\boxed{23}$ A er ei $m \times n$-matrise, altså er $\operatorname{Row} A$ eit underrom av $\mathbb{R}^n$. Frå Teorem 3 har me at $(\operatorname{Row} A)^\perp = \operatorname{Null} A$, og då følgjer det frå Teorem 8 at ein kvar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kan skrivast som $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{u}$ med $\mathbf{p} \in \operatorname{Row} A$ og $\mathbf{u} \in \operatorname{Null} A$.

At likninga $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er konsistent betyr at $\mathbf{x}$ eksisterer. Lat $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{u}$ med $\mathbf{p} \in \operatorname{Row} A$ og $\mathbf{u} \in \operatorname{Null} A$. Då har me $A\mathbf{x} = A\mathbf{p} + A\mathbf{u} = A\mathbf{p} + \mathbf{0}$, og dermed $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$.

Anta at det finst ein annan vektor $\mathbf{p}' \in \operatorname{Row} A$ slik at $A\mathbf{p}' = \mathbf{b}$. Då har me $A(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, altså $(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \in \operatorname{Null} A$. På den andre sida er $(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ ein lineærkombinasjon av vektorar i $\operatorname{Row} A$, altså har me $(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \in \operatorname{Row} A$. Sidan $\operatorname{Row} A$ og $\operatorname{Null} A$ er ortogonale komplement har me $\operatorname{Row} A \cap \operatorname{Null} A = \{\mathbf{0}\}$, så $(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{p}'$. Altså er $\mathbf{p}$ unik.

Oppgåver frå læreboka kap. 6.4, s. 358-359

$\boxed{2}$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}0\\4\\2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}5\\6\\-7\end{bmatrix} - (\|\mathbf{v}_1\|^{-2}\begin{bmatrix}5\\6\\-7\end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}5\\4\\-8\end{bmatrix}$$

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er ein ortogonal basis for W.

$\boxed{9}$ Lat

$$A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3] = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Gram-Schmidt gir

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_2 - (-2)\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_3 - \frac{3}{2}\mathbf{v}_1 - (-\frac{1}{2})\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er ein ortogonal basis for $\operatorname{Col} A$.

Oppgåver frå læreboka kap. 6.5, s. 366

$\boxed{5}$ Minste-kvadrats-løysingane til $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er det same som løysingane til

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Me løyser dette systemet og får

$$\hat{\mathbf{x}} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

der s er ein fri variabel.

Oppgåver frå læreboka kap. 7.1, s. 399

$\boxed{17}$ Me finn først eigenvektorar til dei oppgitte eigenverdiane. For $\lambda_1 = 5$ får me likninga

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$$

og me finn at $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er ein eigenvektor. Sidan me skal bruka eigenvektorane som kolonner i ei ortogonal matrise må me normalisera, så me set $\mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{x}_1$.

For $\lambda_2 = 2$ får me likninga

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$$

som gir at $\mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ er ein eigenvektor.

For $\lambda_3 = -2$ får me likninga

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{p}_3 = \mathbf{0}$$

som gir at $\mathbf{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ er ein eigenvektor.

Dermed vil

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

gi $A = PDP^T$.

24 Me har

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -20 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix} = 10\mathbf{v}_1$$

og

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_2,$$

altså er $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ eigenvektorar til A, med tilhøyrande eigenverdiar høvesvis 10 og 1.

A er symmetrisk, og dermed ortoganalt diagonaliserbar (Teorem 2). Det betyr at det finst ein tredje eigenvektor $\mathbf{v}_3$ som er ortogonal med både $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Det vil seia at $\mathbf{v}_3$ oppfyller likninga

$$[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]^T \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Me løyser likninga og får $\mathbf{v}_3 = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ der s er ein fri variabel. Sidan løysingsrommet er 1-dimensjonalt vil alle løysingar vera eigenvektorar, så me set $s = 1$. Då har me

$$A\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_3,$$

altså er den tilhøyrande eigenverdien 1.

Me normaliserer eigenvektorane:

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Me set

$$P = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & 3 & -1 \\ 2\sqrt{2} & 3 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -4 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Då har me $A = PDP^T$

Oppgåver frå læreboka kap. 7.2, s. 407

$\boxed{11}$ Den kvadratiske forma $2x_1^2 + 10x_1x_2 + 2x_2^2$ kan skrivast som $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ der $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ (sjå eksempel 2 s. 401 for metode). A har karakteristisk likning $\lambda^2 - 4\lambda - 21 = 0$. Det gir eigenverdiar $\lambda_1 = -3$ og $\lambda_2 = 7$, og dermed er forma indefinitt. Dei tilhøyrande normaliserte eigenvektorane er høvesvis $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Me let

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix},$$

og har då $A = PDP^T$. Me kan då bruka variabelskiftet $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ for å bli kvitt kryssproduktleddet:

$$2x_1^2 + 10x_1x_2 + 2x_2^2 = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T P^T AP\mathbf{y} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = -3y_1^2 + 7y_2^2$$

$\boxed{14}$ Den kvadratiske forma $8x_1^2 + 6x_1x_2$ kan skrivast som $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ der $A = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. A har karakteristisk likning $\lambda^2 - 8\lambda + 9 = 0$. Det gir eigenverdiar $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 9$, og dermed er forma indefinitt. Dei tilhøyrande normaliserte eigenvektorane er høvesvis $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ og $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Me let

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix},$$

og har då $A = PDP^T$. Me kan då bruka variabelskiftet $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ for å bli kvitt kryssproduktleddet:

$$8x_1^2 + 6x_1x_2 = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T P^T AP\mathbf{y} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = -y_1^2 + 9y_2^2$$

Eksamensoppgåver

Sjå løysingsforslag på http://wiki.math.ntnu.no/tma4110/2011h/eksamensoppgaver.