Forelesning 2

onsdag 2. august 2017 11:22

I går lærte dere at vektorer er elementer i $\mathbb{R}^n$. I dag skal vi lære at dette ikke er hele sannheten.

Vektorrom

Si vi har en mengde V, og to operasjoner på V kalt skalarmultiplikasjon og addisjon som er slik at

1. $u+(v+w)=(u+v)+w$ for alle $u,v,w \in V$ (Assosiativitet)
2. $u+v=v+u$ for alle $u,v \in V$ (Kommutativitet)
3. Det finnes et element $0 \in V$ som er slik at $u+0=u$ for alle $u \in V$ (Additiv identitet)
4. For alle $u \in V$ finnes det et element $(-u) \in V$ som er slik at $u+(-u)=0$ (Additiv invers)
5. $\alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u$ for alle $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ og $u \in V$ (Kompatibilitet)
6. $1u=u$ for alle $u \in V$ (Multiplikativ identitet)
7. $\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v$ for alle $\alpha \in \mathbb{R}$ og $u,v \in V$ (Distributivitet)
8. $(\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$ for alle $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ og $u \in V$ (—— || ——)

Da sier vi at V er et (reelt) vektorrom, og vi kaller elementene i V for vektorer

(Kravene her ser kanskje fryktelig kompliserte ut, men de gjør at operasjonene på vektorrommet oppfører seg akkurat slik vi forventer at de gjør.)

Eksempler:

- $\mathbb{R}^n$
- Lineærtransformasjoner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \times n$-matriser
- Polynomer av grad opptil n

- Polynomer av grad opptil n
  $$P_n = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_n : a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$
- Alle polynomer
  $$P = \bigcup_{n\geq 0}^{\infty} P_n = \{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0\}$$
- Vektorrommet F bestående av alle funksjoner $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  (Vektorromsoperasjonene er de "opplagte".)

Vi skal se at de to siste eksemplene er veldig forskjellige fra de to første.

Dersom vi har et vektorrom V, og $U \subseteq V$ tilfredsstiller
1. $0 \in U$
2. U er lukket under vektorromsoperasjonene på V
   (Lukket i denne sammenheng betyr at vi ikke kan "unnslippe" U ved hjelp av skalarmultiplikasjon eller addisjon.)

sier vi at U er et underrom av V.

Eksempler:
- I $\mathbb{R}^3$ er $\{0\}$, linjer gjennom origo, plan gjennom origo og $\mathbb{R}^3$ underrom.
  (Og det finnes ingen andre!)
- P_n er et underrom av P, som igjen er et underrom av F.
  (Avhengig av hvordan man definerer P_n og P.)

Lineær uavhengighet

Hvis vi har (endelig mange) vektorer $v_1, \dots, v_n \in V$ kaller vi uttrykk på formen

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

for lineærkombinasjoner av disse vektorene. Mengden U av alle slike linearkombinasjoner er et underrom av V, og vi skriver

$$U = \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_n\}.$$

Et veldig viktig konsept for vektorrom er lineær uavhengighet. Vi sier at vektorene $v_1, \dots, v_n$ er lineært uavhengige dersom implikasjonen

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

holder.
(Ekvivalent med at hvis minst én α_i er ulik null så må også lineærkombinasjonen være det.)

Eksempler:
I $\mathbb{R}^3$ er $(1,-2,-1)$ og $(1,3,1)$ lineært uavhengige, mens $(1,-2,-1)$, $(1,3,1)$ og $(2,1,0)$ ikke er det (fordi $(2,1,0) = (1,-2,-1) + (1,3,1)$)

Dersom det finnes et tall n som er slik at det går an å finne n lineært uavhengige vektorer i V, mens $n+1$ vektorer alltid er lineært avhengige sier vi at V er endeligdimensjonalt og har dimensjon $\dim V = n$
(En kan tenke på dimensjonen som antall "frihetsgrader" i V.)

En maksimal (med n elementer) mengde av lineært uavhengige vektorer for V kalles en basis. Dersom $\{v_1, \dots, v_n\}$ er en basis for V så kan enhver $v \in V$ skrives entydig som en lineærkombinasjon

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Merk nå at siden denne representasjonen er entydig kan vi "identifisere" vektoren v med vektoren $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. Dette betyr at et n-dimensjonalt vektorrom egentlig bare er $\mathbb{R}^n$ i forkledning! Derfor taper vi ingenting på å begrense oss til $\mathbb{R}^n$ når vi snakker om endeligdimensjonale vektorrom.
(Man sier at V og $\mathbb{R}^n$ er isomorfe)

Eksempler:

- $\mathbb{R}^n$ har dimensjon n

  Hvis e_i er vektoren med 1 i i-te komponent og 0 ellers er $\{e_1, \dots, e_n\}$ en basis for $\mathbb{R}^n$ (standard basis)

  $(2,-3,1) = 2e_1 - 3e_2 + e_3$

- Rommet av $m \times n$-matriser har dimensjon mn

  (Med basis E_{ij}, der E_{ij} har bare nuller unntatt en 1 i plass (i,j))

- P_n har dimensjon $n+1$, og $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ er en basis.

Dersom et vektorrom ikke er endeligdimensjonalt sier vi at det er uendeligdimensjonalt. Vi skal ikke si noe mer om uendeligdimensjonale vektorrom, annet enn at både P og F er uendeligdimensjonale.

(Se TMA4145 Lineære metoder og TMA4230 Funksjonalanalyse hvis du ønsker å vite mer!)

Kolonne-, rad- og nullrom

Si vi har en lineærtransformasjon $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ svarende til en $m \times n$-matrise A. Da er det tre viktige underrom vi kan introdusere:

Col(A): Rommet utspent av kolonnene til A. Kan også defineres som bildet av T, altså $R(T) = T(\mathbb{R}^n) = \{T(x) : x \in \mathbb{R}^n\}$

Underrom av $\mathbb{R}^m$

Row(A): Rommet utspent av radene til A.

Underrom av $\mathbb{R}^n$

Nul(A): Alt som T sender til 0

$\{x \in \mathbb{R}^n : T(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$

Underrom av $\mathbb{R}^n$

Det er alltid slik at Col(A) og Row(A) har samme dimensjon (ikke opplagt!), og denne kaller vi rangen til matrisen A.

$$\operatorname{rank}(A) = \dim(\operatorname{Col}(A)) = \dim(\operatorname{Row}(A)) \qquad (\operatorname{rank}(A) \leq \min(m,n))$$

Et viktig resultat er det såkalte rangteoremet, som sier at identiteten

$$\operatorname{rank}(A) + \dim(\operatorname{Nul}(A)) = n$$

alltid holder.

Verken Row(A) eller Nul(A) blir påvirket av elementære radoperasjoner. Vi kan derfor benytte gausseliminasjon for å finne baser for disse rommene, samt rangen til matrisen.
(Col(A) blir endret, men vi kommer tilbake til hvordan vi kan finne en basis for dette underrommet også)

Eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fra dette kan vi direkte lese av at en basis for Row(A) er $\{(1,2,1),(0,1,3)\}$ og derfor at rangen til matrisen er 2. Rangteoremet forteller oss at Nul(A) har dimensjon 1, stemmer det?
Vi ser at vi kan velge $x_3 = t$ fritt, og at vi da får

$$x_2 = -3x_3 = -3t \quad \text{og} \quad x_1 = -2x_2 - x_3 = -2(-3t) - t = 5t$$

Løsningene av $Ax = 0$ er derfor på formen $x = t(5,-3,1)$, og vi ser at en basis for Nul(A) er $\{(5,-3,1)\}$.
Det gjenstår å finne en basis for kolonnerommet. Det viser seg at kolonnerommet er utspent av de kolonnene i A som svarer til pivot-kolonner i matrisen på trappeform. En pivotkolonne svarer til et "trappetrinn i trappen".

I vårt tilfelle er derfor $\{(1,-2,3),(2,-3,5)\}$ en basis for $Col(A)$.

Løsning av lineære likningssystemer

La oss igjen se på likningssystemet $Ax=b$, der A er en $m\times n$-matrise

1. Likningssystemet har en løsning hvis og bare hvis $b\in Col(A)$
2. Dersom x og y er to løsninger, slik at $Ax=Ay=b$, ser vi at
   $A(y-x)=Ay-Ax=b-b=0$,
   slik at $y-x=v$, der $v\in Nul(A)$.
   Dette betyr at hvis x er en løsning er alle andre løsninger på formen $y=x+v$ for $v\in Nul(A)$
3. Løsningen er entydig hvis og bare hvis $Nul(A)=\{0\}$. På grunn av rangteoremet er dette ekvivalent med at $rank(A)=n$.
   (Spesielt kan løsningen aldri være entydig dersom $m<n$.)

Invers

La oss nå spesialisere oss til tilfellet $m=n$, og anta at $rank(A)=n$.
Da vet vi at $Ax=b$ alltid har en løsning, siden vi må ha $Col(A)=\mathbb{R}^n$.
I tillegg er denne løsningen entydig på grunn av punkt 3.

A svarer til en lineærtransformasjon $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Det vi fant over viser at denne funksjonen er invertibel, med en invers $T^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$.
Det er ikke vanskelig å vise at også inversen må være lineær, og den svarer derfor til den såkalte inversmatrisen A^{-1}.
Vi har $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ (husk hvordan vi definerte produktet av matriser)
og $x=A^{-1}b$.

I praksis finner man aldri A^{-1}! Den er mer et teoretisk verktøy.
Hvis du virkelig vil: Utfør elementære radoperasjoner på matrisen

[A I] helt til du ender opp med [I B]. Matrisen B er A^{-1}.