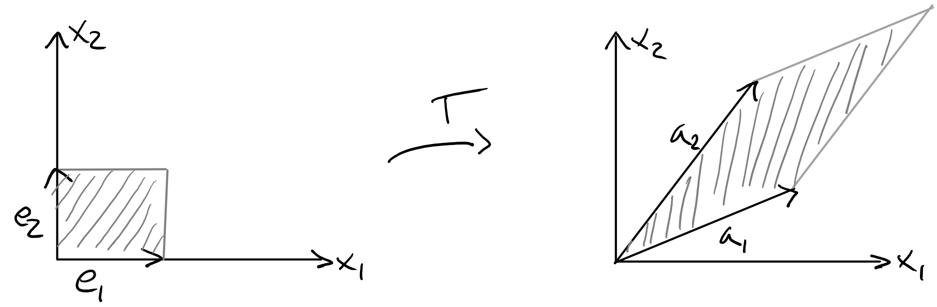
Forelesning 3

tirsdag 8. august 2017 13:36

## Determinanter

I går lærte dere at en $n \times n$-matrise $A$ er invertibel hvis og bare hvis den har full rang, altså at $\text{rank}(A) = n$. I dag skal vi se på en annen karakterisering, som vi først prøver å motivere geometrisk. La oss se på hvordan den tilhørende lineærtransformasjonen $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ skalerer volum.

$n = 2$ $\quad A = [a_1 \mid a_2] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

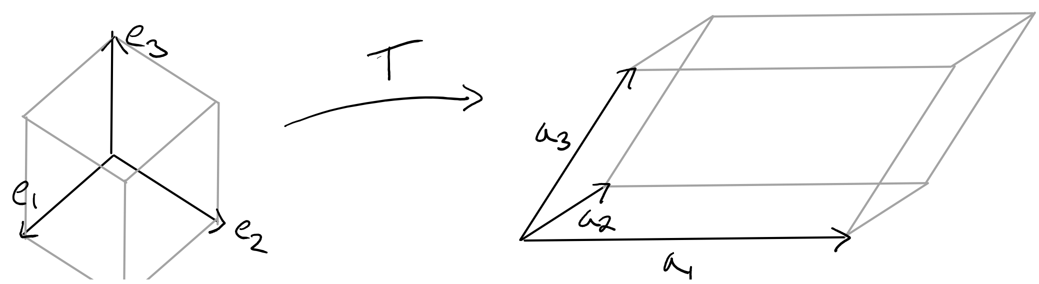


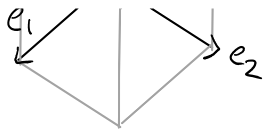

Parallellogrammet utspent av $e_1$ og $e_2$, med areal 1, sendes til parallellogrammet utspent av kolonnene $a_1, a_2$, med areal

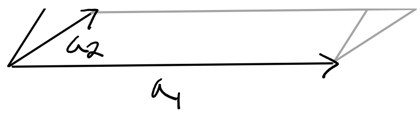
$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (*) \qquad \text{(Merk fortegn!)}$$

Matrisen har full rang hvis og bare hvis $a_1$ og $a_2$ er lineært uavhengige. Dette er tilfellet hvis og bare hvis dette arealet er ulik 0 (arealet til et linjestykke er 0)

$n = 3$ $\quad A = [a_1 \mid a_2 \mid a_3]$






Parallellepipedet utspent av $e_1, e_2, e_3$ sendes til parallellepipedet utspent av kolonnene $a_1, a_2, a_3$.
Igjen ser vi at kolonnene er lineært uavhengige hvis og bare volumet av parallellepipedet er forskjellig fra 0.
(Linjestykker og parallellogrammer har null volum.)

Vi er derfor generelt interessert i "volumet" til parallellotopet utspent av kolonnene $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dette kalles determinanten til $A$, og vi skriver $\det(A)$ eller $|A|$. Som over er $A$ invertibel hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$.
($\det(A) = 0$ hvis og bare hvis parallellotopet har "kollapset")

Det er ikke så lett å se hvordan vi kan generalisere (*). Den enkleste måten er en rekursiv formel.

For en $n \times n$-matrise $A = (a_{ij})$ definerer vi $A_{ij}$ til å være $(n-1) \times (n-1)$-matrisen vi får ved å slette rad $i$ og kolonne $j$ i $A$. Determinanten til $A$ er nå

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj})$$

uansett valg av rad eller kolonne.

Hvordan husker man fortegnene her? Tenk på et sjakkbrett av + og − der vi har + øverst til venstre.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

(Merk at i praksis regner man ikke ut determinanter annet enn for små matriser,

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \\ \vdots & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

(determinanter annet enn for små matriser, med mindre de har mye "struktur")

Eksempler:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = +(-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -(1-0) - 3(1-0) + 2(3-1)$$

$$= 0$$ Ikke invertibel!

$$\begin{vmatrix} 5 & -7 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ -5 & -8 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -5 & -8 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 2(-(-5))\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 10(-18+20)$$

$$= 20$$

Invertibel!

Det er noen ting som er nyttig å kunne om determinanter:

Om A er nedre eller øvre triangulær er det(A) lik produktet av elementene på diagonalen

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

(Motivasjon: Lineærtransformasjonene som svarer til A og B skalerer volum med en faktor henholdsvis det(A) og det(B). Komposisjonen skalerer derfor volum med en faktor det(A)det(B))

Det er <u>ikke</u> slik at $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$!

Hva gjør elementære radoperasjoner med determinanten?

1. Hvis vi bytter om på to rader bytter determinanten fortegn.
2. Hvis vi skalerer en rad med en faktor $\alpha$ skaleres determinanten med en faktor $\alpha$.
3. Hvis vi legger til et multiplum av en rad til en annen endres ikke determinanten.

## Egenverdier og egenvektorer

Fra tidligere vet vi at hvis vi har en $n\times n$-matrise $A$ vil lineærtransformasjonen $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definert ved $T(x) = Ax$ vri og vende på rommet. Det er derfor nyttig å vite hvilke vektorer $T$ ikke gjør noe med, eller generelt bare skalerer.

Dersom $x \neq 0$ og $\lambda \in \mathbb{R}$ er slik at

$$Ax = \lambda x$$

sier vi at $\lambda$ er en egenverdi for $A$ og at $x$ er en tilhørende egenvektor.

Observer at $Ax = \lambda x$ er ekvivalent med at $(A - \lambda I)x = 0$, altså at $x \in \mathrm{Nul}(A - \lambda I)$. Dette betyr at $\lambda$ er en egenverdi for $A$ hvis og bare hvis $A - \lambda I$ er singulær (ikke invertibel). Dette er igjen tilfellet hvis og bare hvis

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

Polynomet $p$ kalles det karakteristiske polynomet til $A$, og er av grad $n$. Fra algebraens fundamentalteorem vet vi at et slikt polynom kan skrives på formen

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{\mu_1}(\lambda_2 - \lambda)^{\mu_2} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{\mu_k}$$ (At koeffisienten foran er 1 må argumenteres for)

der $k \leq n$ og $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = n$.

Røttene $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ er egenverdiene til $A$, og tallene $\mu_1, \ldots, \mu_k$ kalles de algebraiske multiplisitetene. Den algebraiske multiplisiteten $\mu_i$ sier hvor mange lineært uavhengige egenvektorer vi "burde" ha tilhørende egenverdien $\lambda_i$.

Antallet lineært uavhengige egenvektorer vi faktisk har tilhørende $\lambda_i$ kalles den geometriske multiplisiteten $\gamma_i$. Denne defineres som dimensjonen til det såkalte egenrommet $N(A - \lambda_i I)$.

Det er alltid slik at $1 \leq \gamma_i \leq \mu_i$ $(\leq n)$.
(Hvis $\gamma_i < \mu_i$ kan man innføre generaliserte egenvektorer, men vi vil ikke snakke om disse)

Det som er sagt frem til nå er ikke helt korrekt, fordi vi generelt sett må tillate komplekse egenverdier selv for reelle matriser for å få "nok" egenverdier. Disse opptrer alltid i komplekskonjugerte par, siden $Ax = \lambda x$ hvis og bare hvis $A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$.

Eksempler:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \qquad p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 5-\lambda & -3 \\ 0 & 5 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 5 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\Big((5-\lambda)(-3-\lambda) + 15\Big)$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$$
$$= \lambda(1-\lambda)(\lambda-2)$$

A har egenverdiene 0, 1 og 2, alle med algebraisk multiplisitet 1. Da må også de geometriske være 1 (husk $1 \le \gamma_i \le \mu_i$).

$$A - 0I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Om vi velger $x_3 = 5$ får vi $5x_3 = 3x_2 = 15$, eller $x_2 = 3$. Da blir
$x_1 = -2x_2 + 2x_3 = 4$

En egenvektor som svarer til egenverdien 0 er altså $x = (4, 3, 5)$

$$A - 1 \cdot I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Her kan $x_1$ velges fritt og $x_2 = x_3 = 0$. En egenvektor tilhørende egenverdien 1 er altså $(1, 0, 0)$.

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Her kan $x_3$ velges fritt, $x_1 = 0$ og $x_2 = x_3$. En egenvektor for 2 er derfor $(0, 1, 1)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad p(\lambda) = (1-\lambda)^2$$

A har egenverdien 1, med algebraisk multiplisitet 2.

$$A - 1 \cdot I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_2$ kan velges fritt og $x_1 = 0$. En tilhørende egenvektor er $(0, 1)$.

Den geometriske multiplisiteten er bare 1!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad p(\lambda) = \lambda^2 + 1 \quad \text{Komplekse egenverdier } \pm i$$

(Dette er ikke uventet, siden A svarer til rotasjon av planet 90° mot klokken. Ingenting (utenom 0) blir holdt fast.)