Forelesning 4

onsdag 9. august 2017 14:13

Ortogonalitet

Akkurat som i R^3 kan vi snakke om ortogonalitet i R^n. Skalar-produktet av to vektorer x og y er definert ved

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

(På $\mathbb{C}^n$ må y_i kompleks-konjugeres!)

og vi kan også introdusere lengden $|x| = \sqrt{x \cdot x}$.

Vi sier at x og y er ortogonale dersom $x \cdot y = 0$. Vi sier at en basis $\{v_1, \ldots, v_k\}$ for et underrom V av R^n er ortogonal hvis $v_i \cdot v_j = 0$ for $i \neq j$. Hvis vektorene i basisen i tillegg har lengde 1 sier vi at den er ortonormal. Dette er det samme som å kreve at

$$v_i \cdot v_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Eksempler:

- Standardbasisen $\{e_1, \ldots, e_n\}$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$.

- $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)\right\}$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$.

Gitt en hvilket som helst basis kan vi produsere en ortonormal basis med såkalt Gram-Schmidt-ortogonalisering.

Det kan være nyttig å gjøre til konseptet ortogonalt komplement. Dersom V er et underrom kan vi definere et nytt underrom

$$V^{\perp} = \{x \in R^n : x \cdot y = 0 \text{ for alle } y \in V\}$$

bestående av alle vektorer som står ortogonalt på alle vektorene i V. Dette underrommet kalles det ortogonale komplementet til V, og det er alltid slik at $\dim(V) + \dim(V^{\perp}) = n$.

For enhver matrise A er $\mathrm{Row}(A)^{\perp} = \mathrm{Nul}(A)$. Identiteten over gir oss derfor rangteoremet!

Transponert

Hvis A er en $m \times n$-matrise kan vi definere en $n \times m$-matrise A^T, kalt den transponerte til A, ved å bytte om på kolonner og rader (tenk speiling om diagonalen).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

En nyttig egenskap for A^T er at

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$$

for alle $x \in \mathbb{R}^n$ og $y \in \mathbb{R}^m$. Matrisen A^T er den entydige matrisen med denne egenskapen.

Et par "regler":

$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T$ (Transponering er lineær)

$(AB)^T = B^T A^T$

Den siste egenskapen følger av at $\langle ABx, y \rangle = \langle Bx, A^T y \rangle = \langle x, B^T A^T y \rangle$. Entydighet gir $(AB)^T = B^T A^T$.

(Tilsvarende har vi også at $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ fordi $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "g"] & Y \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend left, "f"] & Z \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

)

$$\left(\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "g"] & Y \arrow[l, bend left, "g^{-1}"] \arrow[r, bend left, "f"] & Z \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}\right)$$

Eksempel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Observer at dersom vi betrakter $x \in \mathbb{R}^n$ som en $n \times 1$-matrise gir det mening å skrive skalarproduktet som

$$x \cdot y = y^T x = [y_1 \cdots y_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

(For komplekse tall må $y^* x$ benyttes, og da blir rekkefølgen viktig)

<u>Viktige klasser matriser</u>

Vi sier at en matrise A (nødvendigvis kvadratisk) er symmetrisk dersom $A^T = A$. For eksempel er matrisen

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

symmetrisk. Symmetriske matriser har noen ekstremt nyttige egenskaper:

- Alle egenverdiene er reelle

$$\left(\begin{array}{l} \text{Dersom } Ax = \lambda x \text{ med } 0 \neq x \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C} \text{ er} \\ \quad \lambda |x|^2 = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} |x|^2 \\ \text{så } \lambda = \bar{\lambda}. \end{array} \right)$$

- Dersom x og y er egenvektorer som svarer til distinkte egenverdier λ og μ (altså $\lambda \neq \mu$) er x og y ortogonale, fordi

$$(\lambda-\mu)\langle x,y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle - \langle x, \mu y\rangle$$
$$= \langle Ax, y\rangle - \langle x, Ay\rangle$$
Fordi A er symmetrisk
$$= \langle Ax, y\rangle - \langle Ax, y\rangle$$
$$= 0$$

Siden $\lambda-\mu \neq 0$ må $\langle x,y\rangle = 0$.

Dette betyr at hvis A har nok egenvektorer (de geometriske multiplisitetene er lik de algebraiske) kan vi finne en ortonormal (med Gram-Schmidt) basis for $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer for A. Det såkalte spektralteoremet sier at dette alltid er tilfellet.

Vi sier at en matrise er skjevsymmetrisk dersom $A^T = -A$. Eksempelvis er matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

skjevsymmetrisk.

Vi sier at en invertibel matrise Q er ortogonal dersom $Q^{-1} = Q^T$. Hvorfor kalles en slik matrise ortogonal? Observer at

$$Q^TQ = \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle q_1, q_1\rangle & \langle q_1, q_2\rangle & \cdots & \langle q_1, q_n\rangle \\ \langle q_2, q_1\rangle & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle q_n, q_1\rangle & \cdots & \cdots & \langle q_n, q_n\rangle \end{bmatrix}$$

men også

$$Q^TQ = Q^{-1}Q = I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi har derfor $\langle q_i, q_j \rangle = e_{ij}$, slik at kolonnene til Q er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$. Lineærtransformasjoner som svarer til Q bevarer også lengder, siden

$$|Qx|^2 = \langle Qx, Qx \rangle = \langle x, Q^T Q x \rangle = \langle x, x \rangle = |x|^2$$

Similaritet og diagonalisering

Vi sier at to $n \times n$-matriser A og B er similære hvis det finnes en invertibel matrise P som er slik at

$$B = P^{-1} A P.$$

To matriser som er similære representerer den "samme" lineær-transformasjonen, bare at vi ser på $\mathbb{R}^n$ på en litt annen måte

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{T_B} & \mathbb{R}^n \\ \downarrow T_P & & \downarrow T_P \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{T_A} & \mathbb{R}^n \end{array} \qquad T_B = T_P^{-1} T_A T_P$$

(Svarer til å bytte basis for $\mathbb{R}^n$)

Similære matriser det samme karakteristiske polynomet, siden

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(P) \\ &= \det(A - \lambda I) \underbrace{\det(P^{-1}P)}_{= \det(I) = 1} \\ &= \det(A - \lambda I), \end{aligned}$$

så spesielt har de samme egenverdier.

Det aller beste som kan skje er at en matrise er similær med en diagonalmatrise. Dette er tilfellet hvis og bare hvis det finnes en basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ for $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer for A. (Som er ekvivalent med at de geometriske multiplisitetene er lik de algebraiske)

Definer matrisen $P = [v_1\ v_2 \cdots v_n]$. Da er

$$AP = [Av_1\ Av_2 \cdots Av_n] = [\lambda_1 v_1\ \lambda_2 v_2 \cdots \lambda v_n]$$

$$= [v_1\ v_2 \cdots v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= PD$$

slik at $D = P^{-1}AP$, eller $A = PDP^{-1}$!

Fra det vi lærte i stad vet vi at alle symmetriske matriser er diagonaliserbare, og vi kan til og med velge P slik at den er ortogonal (ortogonalt diagonaliserbar).

Dersom en matrise er diagonaliserbar er det enkelt å regne ut potenser av matrisen, fordi

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}PDP^{-1}PDP^{-1}P \cdots P^{-1}PDP^{-1}$$
$$= PDD \cdots DP^{-1}$$
$$= PD^nP^{-1}$$

Dette kan være veldig nyttig!

Eksempel:

Fibonaccitallene x_n defineres ved at $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ og $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ for $n \geq 1$. La oss skrive dette som

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{der } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ved iterasjon ser vi at

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix} = \cdots = A^n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Definer det gylne snitt $\varphi=(1+\sqrt{5})/2$. Matrisen A kan diagonaliseres med

$$P = \qquad\qquad D=\begin{bmatrix}\varphi & 0\\ 0 & -\varphi^{-1}\end{bmatrix} \qquad P^{-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & \varphi^{-1}\\ -1 & \varphi\end{bmatrix}$$

(Sjekk gjerne)

så

$$\begin{bmatrix}x_{n+1}\\ x_n\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}\varphi & -\varphi^{-1}\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi^n & 0\\ 0 & (-\varphi)^{-n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \varphi^{-1}\\ -1 & \varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

Multipliserer vi ut alt dette finner vi

$$x_n = \frac{\varphi^n-(-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}},$$

som kalles Binets formel. Spesielt har en $x_{n+1}/x_n \to \varphi$ når $n\to\infty$.

Hvis en matrise ikke har nok egenvektorer kan den fortsatt "nesten" diagonaliseres. Enhver matrise kan skrives på formen PJP^{-1}, der J har egenverdiene på diagonalen men noen ekstra ettall rett over diagonalen. Dette kalles Jordan kanonisk form.

Matriseeksponentialet

Når vi skal snakke om differensialligninger vil det såkalte matrise-eksponentialet være nyttig. Husk at

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n.$$

La oss derfor definere (A kvadratisk)

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n. \qquad \text{der } A^0 = I$$

Vi kommer ikke til å snakke om konvergens her, men vit at dette er helt uproblematisk her. For diagonaliserbare matriser har vi

$$e^A = e^{PDP^{-1}} = \sum \frac{1}{n!}(PDP^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}PD^nP^{-1} = Pe^DP^{-1},$$

$$e^A = e^{PDP^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(PDP^{-1})^n = \sum_{n=0} \frac{1}{n!} PD^n P^{-1} = Pe^D P^{-1},$$

hvor en raskt finner at

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

(Mer generelt må D byttes ut med J)