Forelesning 5

torsdag 10. august 2017 14:01

Kontinuitet og deriverbarhet

La $I \subseteq \mathbb{R}$ være et åpent intervall og $f: I \to \mathbb{R}$ en funksjon.

Funksjonen f sies å være kontinuerlig i $s \in \mathbb{R}$ dersom grenseverdien $\lim_{t \to s} f(t)$ eksisterer og er lik $f(s)$. Dersom f er kontinuerlig i alle $s \in I$ sier vi at f er kontinuerlig.
(For alle $\varepsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ slik at $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$ når $|t - s| < \delta$.)

Funksjonen f sies å være deriverbar i $s \in \mathbb{R}$ dersom grenseverdien $\lim_{t \to s} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$ eksisterer, og denne grenseverdien kaller vi $f'(s)$. Dersom f er deriverbar i alle $s \in I$ sier vi at f er deriverbar.

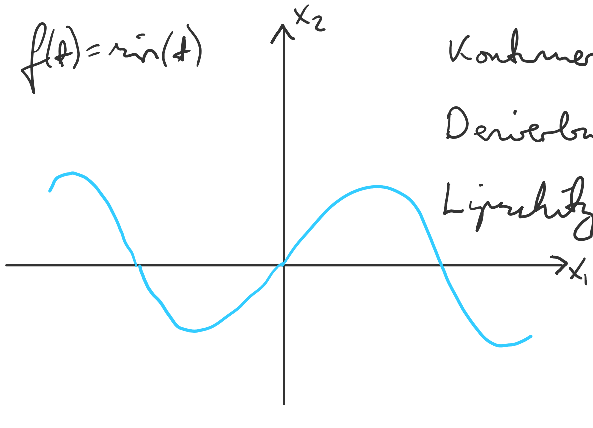
En funksjon som er deriverbar er kontinuerlig, men det motsatte er ikke nødvendigvis sant.
Det finnes også noe som ligger "mellom" kontinuitet og deriverbarhet.
Vi sier at f er Lipschitz dersom det finnes en $L > 0$ slik at

$$|f(t) - f(s)| \leq L|t - s|$$

for alle $t, s \in I$. (Dette betyr at det finnes en øvre skranke for størrelsen på stigningstallet til et linjestykke mellom to punkter på grafen til f.)

Eksempler: (Alle $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

$f(t) = \sin(t)$

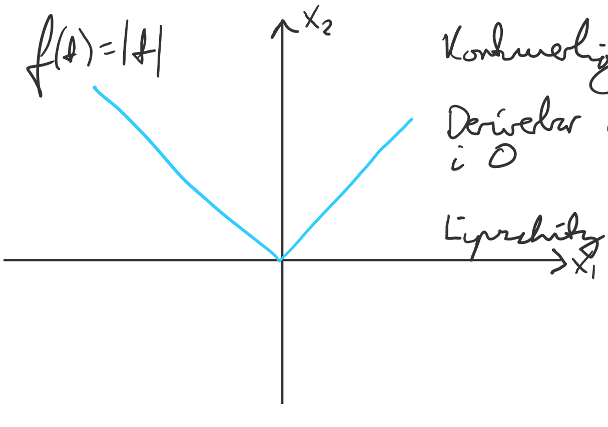


Kontinuerlig

Deriverbar

Lipschitz

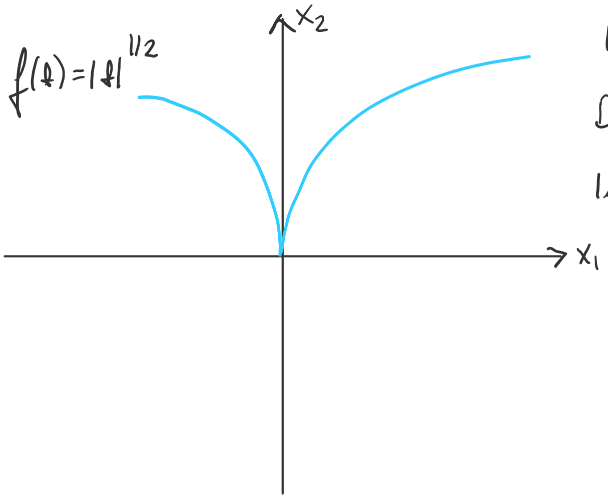
$f(t) = |t|$



Kontinuerlig

Deriverbar unntatt i 0

Lipschitz



Kontinuerlig

Deriverbar utenom i 0

Ikke Lipschitz

<u>Differensiallikninger</u>

En (ordinær) differensiallikning er en likning på formen

$$F(t, x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0,$$

der den ukjente vi ønsker å finne er en funksjon x. Ordenen til differensiallikningen er n dersom den høyeste deriverte som opptrer er $x^{(n)}$.

Eksempel:

$x'(t) - ax(t) = 0$ er en (lineær) første ordens differensiallikning, mens $t^2 x''(t) + t x'(t) + x(t) = 0$ er andre ordens.

Dersom vi tillater at $x(t)$ er en vektor i $\mathbb{R}^n$ kan <u>alle</u> differensiallikninger skrives på formen

$$x'(t) = f(x(t)) \qquad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Ofte skriver man bare

$$\dot{x} = f(x), \qquad (*)$$

men mener det som står over. En slik differensiallikning kan vi tenke på som et dynamisk system. Vi har et punkt $x \in \mathbb{R}^n$, og funksjonen f beskriver retningen som x skal bevege seg i.

Eksempler:

På øvinger i går hadde vi en diskret populasjonsmodell. En kontinuerlig utgave er

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ f \end{bmatrix} \qquad \dot{x} = g(x) \text{ med } x = (s, f),\ g(x) = Ax$$

(Vi vil se at denne modellen gir samme asymptotiske populasjon.)

La oss prøve å skrive $y''(t) - 2y'(t) + y(t)^2 = 0$ på formen (*). Innfør derfor de nye variablene $x_1 = y_1'$ og $x_2 = y$. Da er

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (2x_1 - x_2^2, x_1).$$

Tilsvarende går det også an å fjerne tidsavhengighet: La oss se på $y'(t) - ty(t) = 0$.

Innfører vi $x_1 = y$ og x_2 ved $x_2(t) = t$ finner vi

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_1 x_2, 1)$$

Merk at (*) også kan betraktes som et system av differensialligninger.

Ligningen (*) sammen med en initialbetingelse $x(0) = x_0$ kalles et initialverdiproblem. Vi sier at en funksjon $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, der $0 \in I$, er en løsning av initialverdiproblemet dersom x er kontinuerlig, deriverbar, $x(0) = x_0$ og

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \text{ for } t \in I.$$

Eksistens og entydighet

Det er to teoremer man burde vite om (eller i hvert fall ha sett en gang i sitt liv) når det kommer til eksistens og entydighet av løsninger til differensialligninger:

Peanos eksistensteorem: Hvis f er kontinuerlig finnes det en løsning av initialverdiproblemet.

Picard-Lindelöfs teorem: Hvis f er lokalt Lipschitz er løsningen også entydig. Dersom f er globalt Lipschitz er løsningen global ($I = \mathbb{R}$).
(Det er rett frem å generalisere kontinuitet og Lipschitzkontinuitet til funksjoner på $\mathbb{R}^n$.)

Merk at teoremene bare sier at løsningene eksisterer. Det betyr ikke at det er mulig å skrive de ned! Vanligvis må man ty til approksimasjon.

Eksempler: $\dot{x} = f(x)$ med (bare $\mathbb{R}$)

$f(x) = \sqrt{|x|}$ $\quad x(0) = 0$
Her kan vi benytte Peanos, men ikke Picard-Lindelöf. Både $x(t) = 0$ og $y(t) = \frac{1}{4}\operatorname{sgn}(t)t^2$ er globale løsninger.

$f(x) = x^2$ $\quad x(0) = 1$
Her kan vi benytte begge. Funksjonen f er lokalt, men ikke globalt, Lipschitz, så Picard-Lindelöf garanterer ikke global eksistens. Den entydige løsningen er gitt ved $x(t) = (1-t)^{-1}$, med maksimalt eksistensintervall $I = (-\infty, 1)$

$f(x) = x$ $\quad x(0) = 1$
Begge teoremene kan benyttes, og Picard-Lindelöf garanterer global eksistens. Den entydige løsningen er gitt ved $x(t) = e^t$, $I = \mathbb{R}$.
(Eksponentialfunksjonen kan defineres som løsningen av dette initialverdiproblemet!)

Faseplan/faseportrett

La oss utforske hva vi kan si om den kvalitative oppførselen til (*) uten å faktisk finne løsninger. Vi gjør dette ved å utforske et par eksplisitte differensialligninger

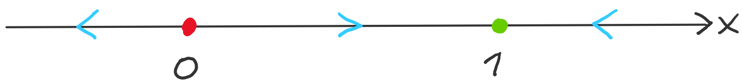
(Vi regner med at f i hvert fall er lokalt Lipschitz.)

En generell observasjon er at hvis $f(x_0)=0$ så vil x forbli i x_0. Dette kalles et likevektspunkt.

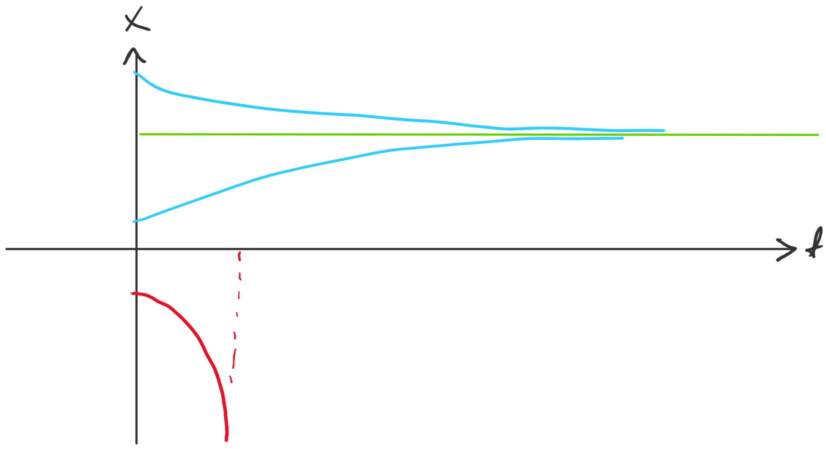
Derom $n=1$ kan vi finne kvalitativ oppførsel ved å se på fortegnene til funksjonen f. For eksempel:

$\dot{x} = f(x)$ med $f(x) = x(1-x)$

(Vi ser bare forover i tid her)



Hvis $x_0<0$ ser vi at løsningen blir mer og mer negativ, og forsvinner ut til $-\infty$. Hvis $0<x_0<1$ eller $x_0>1$ vil løsningen gå mot likevektspunktet 1. Vi ser at 0 er ustabil mens 1 er (asymptotisk) stabil.

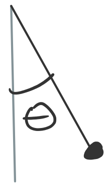


(Kalles den logistiske likningen, og modellerer populasjonsvekst)

For systemer er situasjonen vanskeligere.

Likningen $\ddot{\theta} + \sin(\theta)$ beskriver vinkelen til en idealisert pendel. (Dette er bare Newtons 2. lov.) La oss innføre $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$. Da har vi

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_2, -\sin(x_1))$$

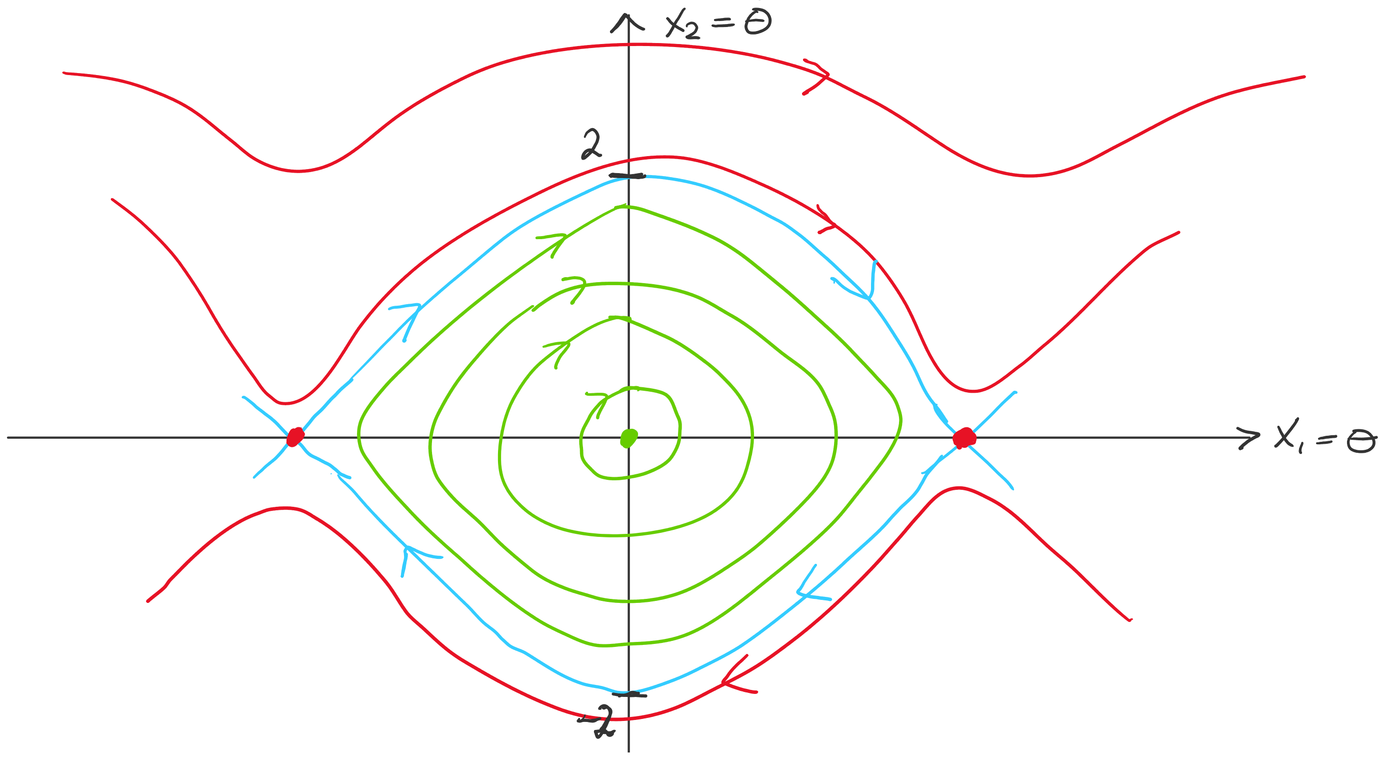


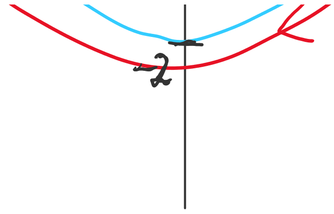
Likevektspunktene tilfredsstiller $x_2 = 0$ og $\sin(x_1) = 0$. Dette gir punktene $(2n\pi, 0)$ for $n \in \mathbb{Z}$, som svarer til at pendelen henger rolig rett ned, og punktene $(\pi + 2n\pi, 0)$ for $n \in \mathbb{Z}$, som svarer til at pendelen står rolig rett opp. Intuitivt sett burde de første være stabile mens de andre burde være ustabile.

La oss definere energien $E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 - \cos(x_1)$. Da er

$$\frac{d}{dt} E(x_1, x_2) = x_2 \dot{x}_2 + \sin(x_1)\dot{x}_1 = x_2(-\sin(x_1)) + \sin(x_1) x_2 = 0$$

for løsninger av likningen. At energien er bevart betyr at løsningene ligger på nivåkurvene til E. Nivåkurven som svarer til $E(\pi, 0) = 1$ (energien i de ustabile likevektspunktene) skiller to veldig forskjellige typer løsninger.





Starter vi med mindre energi enn 1 har vi ikke nok energi til å komme oss opp til toppen, og løsningene blir periodiske. Om vi starter med mer energi vil pendelen bare fortsette å spinne rundt i samme retning.