Forelesning 6

søndag 13. august 2017 19:41

Numerisk løsning

Generelt må vi ty til approksimasjon. Den absolutt enkleste numeriske metoden for løsning av differensialligninger er Eulers metode. La $h>0$ være en skrittstørrelse, og innfør x_n ved at

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{h} = f(x_n), \quad \text{eller} \quad x_{n+1} = x_n + hf(x_n).$$

Her har vi bare byttet ut den deriverte med en endelig differanse. (Eulers metode fungerer OK for noen likninger, men er fryktelig dårlig for andre. For pendelen vil vi gjerne ha en metode som bevarer E.)

Vi går nå over på noen vanlige metoder for å løse spesielle typer differensialligninger

Separable differensialligninger

En separabel differensialligning er en som kan skrives på formen

$$f(y(t))\,y'(t) = g(t)$$

La oss nå anta at f og g har antideriverte F og G (altså at $F'=f$ og $G'=g$). Integrer likningen

$$\int_0^t f(y(s))\,y'(s)\,ds = \int_0^t g(s)\,ds$$

og substituer $u=y$ på venstre side. Da er $du = y'ds$, og vi får

$$\int_{y(0)}^{y(t)} f(u)\,du = \int_0^t g(s)\,ds,$$

eller $F(y(t)) - F(y(0)) = G(t) - G(0)$. Denne likningen må forhåpentligvis løses for å finne y. (F kan i hvert fall inverteres lokalt dersom $f(y(0))\neq 0$)

Eksempler:

$y'=ay$:

Likningen kan skrives på formen $\frac{y'}{y}=a$, så $f(y)=\frac{1}{y}$ og $g(t)=a$.

Nå er $\int \frac{y'}{y}\,dt = \int \frac{dy}{y} = \log(|y|)+C_1$ og $\int a\,dt = at + C_2$, som

som gir

$$\log(|y|) = at + C_3 \quad \text{eller} \quad |y| = C_4 e^{at} \quad \text{eller} \quad y = \pm C_4 e^{at}.$$

Vi absorberer fortegnet inn i C_4, og sitter igjen med at generell løsning er gitt ved $y(t)=Ce^{at}$. Konstanten C bestemmes av (for eksempel) en initialbetingelse.

Et mer komplisert eksempel er den følgende likningen:

$$(1+a^2t^2)y' - y(1-y) = 0$$

($a=0$ tilsvarer populasjons-modellen fra forelesning)

Skriver om til $\frac{1}{y(1-y)}y' = \frac{1}{1+a^2t^2}$

Observer at $\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}$ (Delbrøksoppspalting)

Vi har $\int \frac{dy}{y(1-y)} = \log(|y|) - \log(|y-1|) = \log\left(\left|\frac{y}{y-1}\right|\right)$

og $\int \frac{1}{1+a^2t^2}\,dt \overset{u=at}{=} \frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{a}\arctan(at)$, så

$$\log\left(\left|\frac{y}{y-1}\right|\right) = \frac{1}{a}\arctan(at) + C_1 \quad \text{eller} \quad \frac{y}{y-1} = C_2 e^{\frac{1}{a}\arctan(at)},$$

som gir $y(t) = \frac{1}{1+Ce^{-\frac{1}{a}\arctan(at)}}$

(Dersom $a=0$ må $\arctan(at)/a$ byttes ut med t. Sjekk gjerne at løsningen stemmer med det vi fant kvalitativt.)

Integrerende faktor

Vi kan bruke en integrerende faktor til å løse differensialligninger som kan skrives på formen

$$y'(t) + p(t)\,y(t) = g(t),$$

altså lineære første ordens ligninger (kan være inhomogen, altså at $g \neq 0$). Anta at p har en antiderivert P, og multipliser ligningen med e^P. Da har vi

$$e^P y' + p e^P y = g e^P \quad \text{eller} \quad (e^P y)' = g e^P.$$

Integrerer vi nå ligningen har vi

$$e^P y = \int g e^P\,dt + C, \text{ eller}$$

$$y(t) = e^{-P(t)}\left(\int g e^P\,dt + C\right).$$

Merk at det i praksis er mye enklere å bare huske på teknikken istedenfor å memorisere denne formelen!

Eksempler:

$y' - ay = 0$ (Samme som i sted)

Her kan vi benytte den integrerende faktoren e^{-at} (siden $\int a\,dt = at + C$). Vi får da

$$(e^{-at}y)' = 0 \quad \text{eller} \quad e^{-at}y(t) = C,$$

som gir $y(t) = Ce^{at}$ (som før).

$y'(t) - \cos(t)y(t) = e^{\sin(t)}$ med $y(0) = 0$

Siden $\int(-\cos(t))\,dt = -\sin(t) + C$ kan vi benytte $e^{-\sin(t)}$ som integrerende faktor. Vi finner

$$\left(ye^{-\sin(t)}\right)' = 1,$$

og derfor (integrasjon fra 0 til t)

$$y(t)e^{-\sin(t)} - y(0)e^{-\sin(0)} = t - 0,$$

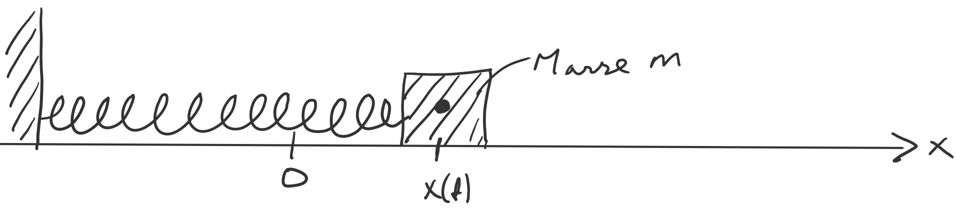
eller $y(t) = te^{\sin(t)}$.

Lineære andre ordens likninger

Likninger på formen

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = r(t)$$

dukker opp overalt. For eksempel gir Newtons 2. lov en andre ordens differensiallikning for posisjonen. Det prototypiske eksempelet er en masse koblet til en fjær.



1. Hookes lov sier at fjæren virker på massen med en kraft $-kx(t)$.
2. For eksempel luftmotstand er proporsjonal med hastigheten, som gir en kraft $-\mu\dot{x}(t)$. (Virker dempende når $\mu > 0$.)
3. Vi kan ha en ekstern kraft/pådrag $f(t)$
   (Kan for eksempel være noe som påtvinger svingninger, eller tyngdekraft om masse-fjær-systemet henger vertikalt.)

Newtons andre lov gir da

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x} + f, \quad \text{eller} \quad m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0,$$

som er av typen over.

I tillegg er andre ordens likninger illustrerende for det som skjer for

Høyere ordens likninger:

For en lineær differensiallikning som er homogen ($r=0$) er det alltid slik at en lineærkombinasjon av løsninger også er en løsning. Løsningene vil derfor danne et vektorrom. For andre ordens likninger viser det seg at dette vektorrommet alltid har dimensjon 2, slik at enhver løsning av den homogene likningen kan skrives på formen

$$y_h = \alpha y_1 + \beta y_2,$$

der y_1 og y_2 er en basis av løsninger (lineært uavhengige). Koeffisientene α og β bestemmes ved at vi kjenner til f.eks $y_h(0)$ og $y_h'(0)$.

For inhomogene likninger vil differansen av to løsninger løse det homogene problemet. Dette betyr at hvis y_p er en partikulærløsning (en vilkårlig løsning av det inhomogene problemet) kan alle løsninger skrives på formen

$$y = y_p + y_h = y_p + \alpha y_1 + \beta y_2 .$$

(Ser dette kjent ut? Det er akkurat samme situasjon som vi har for lineære likningssystemer!)

Konstante koeffisienter

La oss nå se på hvordan vi kan løse lineære andre ordens differensial-likninger med konstante koeffisienter.

(I morgen vil vi se på lineære systemer, og siden vi vet at lineære n-te ordens likninger kan skrives om til et $n \times n$-system vil alt dette falle ut av den teorien også)

Likningen for masse-fjær-systemet kan skrives

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = r, \quad \text{der} \quad b = \frac{\mu}{m}, \; c = \frac{k}{m}, \; r = \frac{f}{m},$$

og dette er en generell lineær andre orden differensialligning med konstante koeffisienter.

Vi prøver nå å se når $x(t) = e^{\lambda t}$ løser den homogene likningen, hvor vi tillater λ å være et komplekst tall. Vi får

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + b\lambda e^{\lambda t} + c e^{\lambda t} = (\lambda^2 + b\lambda + c) e^{\lambda t} = 0,$$

slik at x er en løsning hvis og bare hvis λ er en rot for det karakteristiske polynomet $p(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$.

Vi har nå tre forskjellige muligheter:

1. Hvis p har to distinkte reelle røtter λ_1 og λ_2 er
$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad \text{og} \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$
en basis.

2. Hvis p har en reell rot λ med multiplisitet 2 er
$$y_1(t) = e^{\lambda t} \quad \text{og} \quad y_2(t) = t e^{\lambda t}$$
en basis (ikke opplagt).

3. Hvis p har to kompleks-konjugerte røtter $\lambda = \alpha \pm i\omega$ er
$$y_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\omega t) \quad \text{og} \quad y_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\omega t)$$
en basis. (Fordi $e^{(\alpha \pm i\omega)t} = e^{\alpha t}(\cos(\omega t) \pm i\sin(\omega t))$)

En inhomogen likning kan noen ganger løses ved ubestemte koeffisienters metode. Idéen er å prøve en løsning som "likner på" høyresiden r, med generelle koeffisienter. Vi velger nå de koeffisientene som fungerer. Hvis høyresiden er en løsning av det homogene problemet må vi ta med en ekstra t, som i tilfelle 2 over.

Eksempel:

$$y'' + 2y' + 2y = -2e^{-t}\sin(t)$$

Det karakteristiske polynomet blir $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$, som har røttene $\lambda = -1 \pm i$.

En basis for det homogene problemet er da $y_1(t) = e^{-t}\cos(t)$, $y_2(t) = e^{-t}\sin(t)$.

Siden høyresiden løser det homogene problemet gjetter vi

$$y_p(t) = Ate^{-t}\cos(t) + Bte^{-t}\sin(t).$$

Ved innsetting ser vi at vi må ha $A=1$ og $B=0$. Generell løsning av likningen er derfor

$$y(t) = te^{-t}\cos(t) + \alpha e^{-t}\cos(t) + \beta e^{-t}\sin(t).$$