Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forberedende kurs i lineær algebra og differensiallikninger Sommer 2017

Løsningsforslag — Øving 1

$\boxed{1}$ **a)** Dette er ikke en lineærtransformasjon, da

$$S(0,1) + S(1,0) = (0,2) \neq (1,2) = S(1,1).$$

(Merk at det er mange andre måter å argumentere på her.)

b) Dette er en lineærtransformasjon, svarende til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

(Bare det at den kan uttrykkes ved hjelp av en matrise beviser at den er en lineærtransformasjon, men du må gjerne sjekke lineariteten "manuelt".)

c) Ikke en lineærtransformasjon, da $K(0) \neq 0$.
(Hvorfor må 0 alltid sendes til 0 med en lineærtransformasjon?)

d) Dette er en lineærtransformasjon, som svarer til matrisen

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{2}$ Lineærtransformasjonen L speiler planet om x_2-aksen (lag gjerne en skisse!).

$\boxed{3}$ **a)**

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 9 & -6 & -2 \\ 2 & -1 & 12 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} -12 & 8 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ 7 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{4}$ **a)** Likningssystemet kan skrives på formen $Ax = b$ med

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Gausseliminasjon gir

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

og vi finner $x_3 = 2$, $x_2 = -5$ og $x_1 = -4$ ved tilbakesubstitusjon. Løsningen $x = (-4, -5, 2)$ er den eneste.

b) Her har vi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Vi utfører Gausseliminasjon og finner

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\
&\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(Strengt tatt er matrisen på trappeform allerede etter det første steget. Det andre steget får den over på redusert trappeform, mens det siste steget egentlig er "unødvendig". Det bare forenkler tallene litt.)

Vi ser her at x_3 kan velges fritt, la oss si $x_3 = t$, og at $x_2 = 3 - 2t$ og $x_1 = -2 + t$ uttrykt ved t. Det er uendelig mange løsninger, og de er på formen $x = (-2 + t, 3 - 2t, t) = (-2, 3, 0) + t(1, -2, 1)$ for $t \in \mathbb{R}$. Legg merke til at løsningsmengden danner en linje i planet.

$\boxed{5}$ Siden $|x|$ alltid er ikkenegativ er både $\mathbb{R}$ og $[0, \infty)$ gyldige kodomener. Vi kan *ikke* bruke $(0, \infty)$, fordi $f(0) = 0$ og $0 \notin (0, \infty)$. Dersom f i stedet hadde hatt $(0, \infty)$ eller $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ som domene ville alle valgene av kodomene vært gyldige.

(Her er $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$. Altså er $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ en enklere måte å skrive mengden $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ på.)