Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forberedende kurs i lineær algebra og differensiallikninger Sommer 2017

Løsningsforslag — Øving 3

$\boxed{1}$ **a)**

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 15 - 8 = 7$$

Invertibel siden determinanten er forskjellig fra null.

b) Utvikler langs første kolonne (det er en 0 der).

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = (-2)(-7) - 3(-6) = 32$$

Invertibel

c) De to siste radene i matrisen er klart lineært avhengige. Matrisen kan derfor ikke ha full rang, og er derfor ikke invertibel. Determinanten må være null. (Alternativt kan man benytte seg av at determinanten til en øvre triangulær matrise er produktet av elementene på diagonalen.)

$\boxed{2}$ Vi finner ved å utvikle langs første rad (andre fungerer selvsagt fint også)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{vmatrix} = 1 + a^3.$$

Matrisen er altså invertibel hvis og bare hvis $a \neq -1$, som stemmer med det vi fant i går.

$\boxed{3}$ Her finner vi

$$p(\lambda) = \det(U - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ 0 & c - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(c - \lambda)$$

Egenverdiene er altså a og c (uten å ta hensyn til multiplisitet). Generelt vil egenverdiene til en øvre (eller nedre) triangulær matrise være gitt ved elementene på diagonalen.

$\boxed{4}$ **a)** Vi finner det karakteristiske polynomet

$$p(\lambda) = (5 - \lambda)(-\lambda) + 6 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Egenverdiene er derfor $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 3$, begge med algebraisk multiplisitet 1. Da må også de geometriske være 1 (de er minst 1 og mindre eller lik de algebraiske).
Siden

$$A - 2 \cdot I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

svarer egenverdien λ_1 til egenvektoren $v_1 = (2, -3)$ (andre multiplum av denne fungerer selvfølgelig også fint). Tilsvarende er

$$A - 3 \cdot I = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

så for λ_2 har vi egenvektoren $v_2 = (1, -1)$.

b) Det karakteristiske polynomet blir

$$p(\lambda) = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ -9 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)((-2 - \lambda)(4 - \lambda) + 9) = (1 - \lambda)^3,$$

slik at eneste egenverdi er $\lambda_1 = 1$, med algebraisk multiplisitet 3. Siden

$$B - I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -9 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

er det bare én lineært uavhengig egenvektor tilhørende egenverdien (nullrommet til $B - I$ har dimensjon 1), nemlig $v_1 = (1, 0, 0)$. Den geometriske multiplisiteten til λ_1 er følgelig 1.