Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forberedende kurs i lineær algebra og differensiallikninger
Sommer 2017

Løsningsforslag — Øving 4

1 Kall antall innbyggere i sentrum og forstedene etter n år for henholdsvis s_n og f_n. Vi vet at $s_0 = 7$ og $f_0 = 5$. Fra oppgaveteksten får vi at

$$\begin{bmatrix} s_n \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8s_{n-1} + 0.1f_{n-1} \\ 0.2s_{n-1} + 0.9s_{n-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} s_{n-1} \\ f_{n-1} \end{bmatrix},$$

og derfor ved iterasjon at

$$\begin{bmatrix} s_n \\ f_n \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} s_{n-2} \\ f_{n-2} \end{bmatrix} = \cdots = A^n \begin{bmatrix} s_0 \\ f_0 \end{bmatrix} = PD^nP^{-1} \begin{bmatrix} s_0 \\ f_0 \end{bmatrix}.$$

Setter vi nå inn finner vi derfor

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s_n \\ f_n \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -0.7^n \\ 2 & 0.7^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 + 3 \cdot 0.7^n \\ 8 - 3 \cdot 0.7^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} + 0.7^n \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Fra dette ser vi direkte at $(s_n, f_n) \to (4, 8)$ når $n \to \infty$ (fordi $0.7 < 1$). På lang sikt vil det derfor bli 4 millioner innbyggere i sentrum og 8 millioner innbyggere i forstedene.

2 **a)** Vi utvikler langs andre rad/kolonne (det blir samme beregning) og finner

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (4-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) \\ &= (4-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3). \end{aligned}$$

b) Fra det karakteristiske polynomet leser vi av at A har egenverdiene $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ og $\lambda_3 = 4$. Siden

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

har vi egenvektoren $w_1 = (1, 0, 1)$, og videre er

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

slik at vi kan velge $w_2 = (1, 0, -1)$. Til slutt er

$$A - 4I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

slik at λ_3 har en tilhørende egenvektor $w_3 = (0, 1, 0)$.

c) Vi ser umiddelbart at egenvektorene w_1, w_2, w_3 er ortogonale, slik de burde være siden A er symmetrisk og de svarer til distinkte egenverdier. Siden $|w_1| = |w_2| = \sqrt{2}$ og $|w_3| = 1$ definerer vi

$$\begin{aligned} v_1 &= w_1/\sqrt{2} = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \\ v_2 &= w_2/\sqrt{2} = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}) \\ v_3 &= w_1 = (0, 1, 0), \end{aligned}$$

som blir en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$ bestående av egenvektorer for A.
Hvis vi nå definerer matrisen

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

og

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

er

$$\begin{aligned} A &= PDP^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

en ortogonal diagonalisering av A.

d) Vi finner

$$\begin{aligned} e^A &= Pe^DP^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}e & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}e \\ \frac{1}{\sqrt{2}}e^3 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}e^3 \\ 0 & e^4 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^3 & 0 & \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^3 \\ 0 & e^4 & 0 \\ \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}e^3 & 0 & \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e^3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$