Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forberedende kurs i lineær algebra og differensiallikninger
Sommer 2017

Løsningsforslag — Øving 5

$\boxed{1}$ Her er det det bare å sette inn. Vi finner

$$y'(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad y''(t) = -\frac{2t}{(1+t^2)^2},$$

så hvis y skal tilfredstille differensiallikningen har vi

$$(t^2+1)\left(-2t\frac{1}{(1+t^2)^2}\right) + at\frac{1}{1+t^2} = 0.$$

Om vi nå kansellerer det som er felles for de to leddene (for $t \neq 0$) sitter vi igjen med at $a = 2$.

$\boxed{2}$ **a)** Sett $x_1 = y'$ og $x_2 = y$. Da har vi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 = y'' &= ay' + by + c \\ &= ax_1 + bx_2 + c\end{aligned}$$

og

$$\dot{x}_2 = y' = x_1.$$

Vi kan altså skrive differensiallikningen som et system

$$\dot{x} = Ax + d$$

der

$$x = (x_1, x_2), \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad d = (c, 0).$$

b) Vi setter $x_1 = y$ og $x_2 = t$ (strengt tatt mener vi her funksjonen x_2 definert ved $x_2(t) = t$). Da er

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y' = g(t)y = g(x_2)x_1 \\ \dot{x}_2 &= 1,\end{aligned}$$

slik at vi kan skrive differensiallikningen som

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (g(x_2)x_1, 1)$$

c) Sett $x_1 = y^{(3)}$, $x_2 = y''$, $x_3 = y'$ og $x_4 = y$. Da har vi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= y^{(4)} = \sin(y)(y')^2 = \sin(x_4)x_3^2 \\ \dot{x}_2 &= y^{(3)} = x_1 \\ \dot{x}_3 &= x_2 \\ \dot{x}_4 &= x_3,\end{aligned}$$

så vi kan skrive differensiallikningen på formen $\dot{x} = f(x)$ med $x = (x_1, \ldots, x_4)$ og

$$f(x) = (\sin(x_4)x_3^2, x_1, x_2, x_3).$$

$\boxed{3}$ Den første faktoren har et nullpunkt i 0, mens uttrykket som står i parentesen har nullpunkter i $\pm\log(2)$. Likevektspunktene er altså 0 og $\pm\log(2)$. Funksjonen f er negativ på $(-\infty, -\log(2)) \cup (0, \log(2))$ og positiv på $(-\log(2), 0) \cup (\log(2), \infty)$. Vi har nå fire forskjellige muligheter:

- Om vi starter løsningen på intervallet $(-\infty, -\log(2))$ forsvinner løsningen ut til $-\infty$.
- På intervallet $(-\log(2), 0)$ går løsningen mot likevektspunktet 0.
- På intervallet $(0, \log(2), 0)$ går løsningen også mot likevektspunktet 0.
- På intervallet $(\log(2), \infty)$ går løsningen mot ∞.

Av listen over ser vi at likevektspunktet 0 er stabilt, mens $\pm\log(2)$ er ustabile.

$\boxed{4}$ Definér $E(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Da er

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(x_1, x_2) &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2x_1(-x_2) + 2x_2x_1 \\ &= 0\end{aligned}$$

dersom (x_1, x_2) tilfredstiller systemet. Siden $x_1^2 + x_2^2$ da er konstant må løsningene bevege seg på en sirkel (radien blir bestemt av hvilket punkt vi starter i).