Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forberedende kurs i lineær algebra og differensiallikninger Sommer 2017

Løsningsforslag — Øving 6

$\boxed{1}$ Vi finner

$$\begin{aligned}
(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) &= (\pi/4, 0) + 0.2(0, -\sin(\pi/4)) \approx (0.785, -0.141) \\
(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) &\approx (0.785, -0.141) + 0.2(-0.141, -\sin(0.785)) \approx (0.757, -0.282) \\
(x_1^{(3)}, x_2^{(3)}) &\approx (0.757, -0.282) + 0.2(-0.282, -\sin(0.757)) \approx (0.701, -0.419).
\end{aligned}$$

Dette stemmer med intuisjonen vår. Vinkelen minker og hastigheten er negativ fordi pendelen beveger seg mot venstre. Ved $t = 0.6$ er vinkelen ca $40°$. Om man regner ut energiene til $x^{(0)}$ og $x^{(3)}$ vil en se at energien til pendelen har økt litt. Dette er på grunn av feilen i Eulers metode.

$\boxed{2}$ Vi skriver først om likningen til

$$y^{-1/2}y' = t^2,$$

som vi så integrerer for å finne

$$2y^{1/2} = \frac{1}{3}t^3 + \tilde{C},$$

eller

$$y = (C + t^3/6)^2.$$

Vi ser at løsningen av initialverdiproblemet er gitt ved

$$y(t) = \left(1 + \frac{1}{6}t^3\right)^2.$$

$\boxed{3}$ Siden $\int 2/t\,dt = 2\log(|t|) + C = \log(t^2) + C$ kan vi benytte $\exp(\log(t^2)) = t^2$ som integrerende faktor. Vi finner

$$(t^2y)' = \cos(t),$$

og derfor

$$t^2y(t) = \sin(t) + C.$$

Siden $y(\pi/2) = 0$ må vi velge $C = -1$, og løsningen av initialverdiproblemet blir dermed

$$y(t) = \frac{\sin(t) - 1}{t^2}.$$

(Merk at dette bare er en løsning for $t > 0$.)

4 Det karakteristiske polynomet blir

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2),$$

slik at en basis for de homogene løsningene er gitt ved $y_1(t) = e^t$ og $y_2(t) = e^{2t}$. Siden høyresiden ikke løser den homogene likningen prøver vi en partikulærløsning på formen

$$y_p(t) = Ae^{3t}.$$

Ved innsetting ser vi at vi må velge $A = 1/2$. Generell løsning blir dermed

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{3t} + \alpha e^t + \beta e^{2t}.$$

5 Her gjelder det å holde tungen rett i munnen. Vi har

$$\begin{aligned}
y_p'(t) &= e^{-t}\cos(t) - te^{-t}\cos(t) - te^{-t}\sin(t) \\
y_p''(t) &= -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t) - e^{-t}\cos(t) + te^{-t}\cos(t) + te^{-t}\sin(t) \\
&\qquad - e^{-t}\sin(t) + te^{-t}\sin(t) - te^{-t}\cos(t) \\
&= -2e^{-t}\cos(t) - 2e^{-t}\sin(t) + 2te^{-t}\sin(t),
\end{aligned}$$

og derfor

$$\begin{aligned}
y_p''(t) + 2y_p'(t) + 2y_p(t) &= -2e^{-t}\cos(t) - 2e^{-t}\sin(t) + 2te^{-t}\sin(t) \\
&\quad + 2e^{-t}\cos(t) - 2te^{-t}\cos(t) - 2te^{-t}\sin(t) \\
&\quad + 2te^{-t}\cos(t) \\
&= -2e^{-t}\sin(t),
\end{aligned}$$

slik at y_p er en løsning av likningen.