Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Forberedende kurs i lineær algebra og differensiallikninger
Sommer 2017

Løsningsforslag — Øving 7

$\boxed{1}$ Vi starter med å finne egenverdier og egenvektorer for matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.01 \\ 0.01 & -0.01 \end{bmatrix}.$$

Siden A er symmetrisk vet vi at vi kan finne en ortogonal diagonalisering. Det karakteristiske polynomet blir

$$p(\lambda) = (-0.01 - \lambda)^2 - 0.01^2 = \lambda(\lambda + 0.02)$$

slik at egenverdiene blir $\lambda_1 = -0.02$ og $\lambda_2 = 0$. Siden

$$A - (-0.02)I = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 \\ 0.01 & 0.01 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kan vi velge $v_1 = (1, -1)/\sqrt{2}$, og siden

$$A - 0I = \begin{bmatrix} -0.01 & 0.01 \\ 0.01 & -0.01 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kan vi velge $v_2 = (1, 1)/\sqrt{2}$.

(Merk at vi faktisk kunne skrevet ned v_2 umiddelbart etter å ha funnet v_1, fordi vi vet at egenvektorene tilhørende egenverdien 0 står ortogonalt på egenvektorene tilhørende egenverdien -0.02, igjen fordi A er symmetrisk. Det ortogonale komplementet til $\operatorname{span}(\{v_1\})$ er endimensjonalt, så dette bestemmer v_2 entydig opp til skalering.)

Matrisen A kan derfor diagonaliseres som

$$A = PDP^T, \quad P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}, \quad D = \operatorname{diag}(-0.02, 0).$$

Vi har nå

$$\begin{aligned} e^{At} &= Pe^{Dt}P^T \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-0.02t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 + e^{-0.02t} & 1 - e^{-0.02t} \\ 1 - e^{-0.02t} & 1 + e^{-0.02t} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

slik at løsningen blir

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 + e^{-0.02t} & 1 - e^{-0.02t} \\ 1 - e^{-0.02t} & 1 + e^{-0.02t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 50 \begin{bmatrix} 1 + e^{-0.02t} \\ 1 - e^{-0.02t}. \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Spesielt ser vi at det er 25 gram salt i tank nummer to når

$$50(1 - e^{-0.02t}) = 25,$$

som gir $t = 50\log(2)$, altså etter rundt 35 sekunder.

Et alternativ til å regne ut matriseeksponentialet (her slipper vi billig unna siden P^{-1} er enkel å regne ut for symmetriske matriser) er å benytte at vi vet at generell løsning er

$$x(t) = \alpha e^{-0.02t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

for så å bestemme koeffisientene α og β.

$\boxed{2}$ Vi finner

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

slik at til egenverdien 1 har vi én egenvektor $v_1 = (1, 1, 0)$. For egenverdien 3 har vi

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Her er $x_2 = s$ og $x_3 = t$ frie variabler og $x_1 = t - s$. Vektorene i nullrommet til $A - 3I$ er derfor på formen

$$x = (t - s, s, t) = s(-1, 1, 0) + t(1, 0, 1),$$

og vi kan følgelig velge egenvektorene $v_2 = (-1, 1, 0)$ og $v_3 = (1, 0, 1)$ til egenverdien 3.

Generell løsning av differensiallikningen blir

$$x(t) = a_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

For å finne riktig koeffisienter for vår initialdata løser vi likningssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

hvor Gausseliminasjon (trekk fra rad 1 fra rad 2) gir

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi finner nå ved tilbakesubstitusjon $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, slik at løsningen av initialverdiproblemet blir

$$x(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t + e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}.$$