

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4110 Matematikk 3 – EKSEMPEL 2**

Faglig kontakt under eksamen: Spør på mattelab hvis du lurer på noe

Tlf: Nei

Eksamensdato: Når du vil

Eksamenstid (fra–til): Fire timer

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt. (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S)

Annen informasjon:

Eksamenen består av ti oppgaver Hver av disse teller like mye. Alle svar må begrunnes.

Merk. Dette er ikke en virkelig eksamen, men et eksempel for å vise hvordan en eksamen kan se ut. Hvis du ikke har nok godkjente øvinger, kan du levere svar på disse oppgavene som en ekstra øving.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave

Originalen er:

1-sidig ☐ 2-sidig ☒

sort/hvit ☒ farger ☐

skal ha flervalgskjema ☐

Dato

Sign

Oppgave 1 Likningssystemet

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 2 \\ 4x + 6y = 3 \end{cases}$$

beskriver tre rette linjer i $\mathbb{R}^2$. Tegn dem, og avgjør om systemet har en løsning.

Oppgave 2 Regn ut inversen til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

og bruk den til å løse likningen

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 3 Skriv om den homogene andreordens differensiallikningen

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

til et system av førsteordens differensiallikninger, og finn generell løsning.

Finn deretter den generelle løsningen av den ikkehomogene differensiallikningen

$$y'' - 3y' + 2y = e^t.$$

Oppgave 4 Anta at A er en 3×3 -matrise med egenverdiene 2, 5 og -5 . Finn alle egenverdiene til hver av matrisene $3A$ og A^2 . (Pass på at du forklarer hvorfor egenverdiene du finner er *alle* egenverdiene til disse matrisene.)

Oppgave 5 Bruk minste kvadraters metode til å finne en approksimasjon til likningssystemet

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 2 \\ 5x + 6y = 3 \end{cases}$$

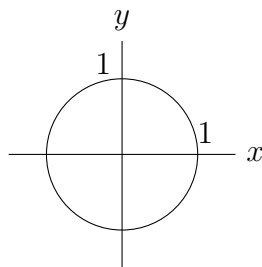
Er approksimasjonen du fant en eksakt løsning?

Oppgave 6 Vis at rotasjonsmatrisen

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

er en ortogonal matrise. Finn en matrise A som har kolonnene i rotasjonsmatrisen som egenvektorer med egenverdier henholdsvis 1 og 2.

Fra nå lar vi θ være lik 45 grader. Skissér bildet av enhetssirkelen



under lineærtransformasjonen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Oppgave 7 La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 20 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -10 & 6 \end{bmatrix}$$

Finn alle vektorer $\mathbf{x}$ slik at $A^2\mathbf{x} = A\mathbf{x}$.

Oppgave 8 Husk at vi skriver $\mathcal{P}_2$ for vektorrommet som består av alle polynomfunksjoner av grad 2 eller lavere. La p_1 , p_2 , p_3 og q være følgende polynomer i $\mathcal{P}_2$:

$$p_1(x) = x^2 - 2$$

$$q(x) = 4x^2 + x - 7$$

$$p_2(x) = -x^2 + x + 2$$

$$p_3(x) = 3x^2 + x - 5$$

Vis at $\mathcal{B} = (p_1, p_2, p_3)$ er en basis for $\mathcal{P}_2$, og finn koordinatene $[q]_{\mathcal{B}}$ til q med hensyn på denne basisen.

Oppgave 9 Vis at en determinanten til en diagonaliserbar matrise er lik produktet av egenverdiene.

Oppgave 10 La $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ være en lineærtransformasjon. Vis at T er surjektiv hvis og bare hvis det finnes en lineærtransformasjon $S: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ slik at $T(S(\mathbf{v})) = \mathbf{v}$ for alle vektorer $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^m$.