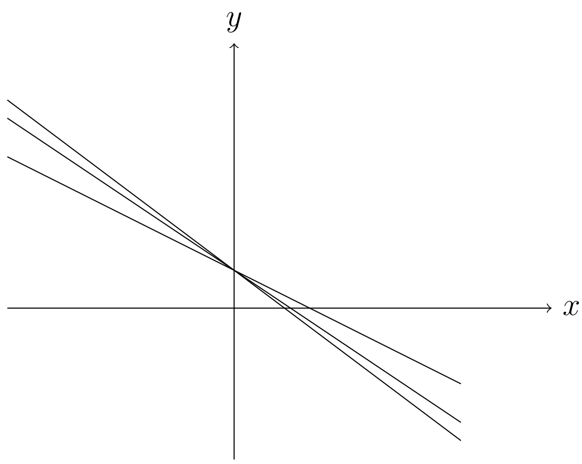
Løsningsforslag

Oppgave 1 Vi skriver linjene på formen $y = f(x)$:

$$y = \frac{1-x}{2}$$
$$y = \frac{2-3x}{4}$$
$$y = \frac{3-4x}{6}$$



Alle linjene skjærer samme punkt på y-aksen; systemet har én løsning.

Oppgave 2 Vi finner inversen på vanlig måte ved å gausseliminere matrisen $\left[\begin{array}{c|c} A & I_3 \end{array}\right]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Dette gir

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nå kan vi løse likningen ved å gange med A^{-1}:

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ A^{-1}A\mathbf{x} &= A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ I\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Likningen har altså én løsning, nemlig $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Oppgave 3 Ved å sette $v_1 = y$ og $v_2 = y'$ får vi følgende system:

$$\begin{cases} v_1' = v_2 \\ v_2' = -2v_1 + 3v_2 \end{cases} \qquad \text{som også kan skrives som} \qquad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Koeffisientmatrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

har karakteristisk polynom

$$\begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (-\lambda)(3-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

og egenverdier 1 og 2, med tilhørende egenrom henholdsvis

$$\mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\} \qquad \text{og} \qquad \mathrm{Sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}.$$

Den generelle løsningen av systemet er

$$\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^t + c_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}e^{2t}.$$

Den generelle løsningen av likningen $y'' - 3y' + 2y = 0$ er dermed:

$$y = c_1e^t + c_2e^{2t}$$

Nå går vi videre til å se på den ikkehomogene likningen $y'' - 3y' + 2y = e^t$. Vi har allerede funnet generell løsning $y_h = c_1e^t + c_2e^{2t}$ av den tilhørende homogene ligningen. Det gjenstår å finne en partikulær løsning.

Vi bruker variasjon av parametre på de to lineært uavhengige løsningene $y_1 = e^t$ og $y_2 = e^{2t}$ av den homogene likningen. Vi får

$$y_1' = e^t, \qquad y_2' = 2e^{2t} \qquad \text{og} \qquad y_1y_2' - y_2y_1' = e^{3t}$$

og integralene vi trenger i variasjon av parametre blir:

$$\int \frac{y_1 \cdot e^t}{y_1y_2' - y_2y_1'}dt = \int \frac{e^{2t}}{e^{3t}}dt = \int e^{-t}dt = -e^{-t} + C$$
$$\int \frac{y_2 \cdot e^t}{y_1y_2' - y_2y_1'}dt = \int \frac{e^{3t}}{e^{3t}}dt = \int 1dt = t + C$$

Variasjon av parametre gir oss dermed følgende løsning:

$$y_p = y_2 \cdot (-e^{-t}) - y_1 \cdot t = -e^t - te^t$$

Her kan vi observere at det ene leddet, nemlig $-e^t$, allerede er en løsning av den tilhørende homogene likningen, så vi kan sløyfe dette fra den partikulære løsningen og isteden velge

$$y_p = -te^t.$$

Den generelle løsningen til den ikkehomogene likningen er altså:

$$y = y_h + y_p = c_1e^t + c_2e^{2t} - te^t$$

Oppgave 4 Anta at A er en 3×3-matrise med egenverdiene 2, 5 og -5. Finn alle egenverdiene til hver av matrisene $3A$ og A^2.

Observasjon: Hvis λ er en egenverdi til A, og $\mathbf{v}$ er en tilhørende egenvektor, så ser vi at

$$\begin{aligned}(3A)\mathbf{v} &= 3(A\mathbf{v}) = 3(\lambda\mathbf{v}) = (3\lambda)\mathbf{v}\\ A^2\mathbf{v} &= A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(A\mathbf{v}) = \lambda(\lambda)\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}.\end{aligned}$$

Dette betyr at 3λ er en egenverdi til $3A$ og λ^2 er en egenverdi til A^2.

Denne observasjonen gir oss dermed at 6, 15 og -15 er egenverdier til $3A$; 4 og 25 er egenverdier til A^2.

Påstand: Dette er alle egenverdiene til $3A$ og A^2.

$3A$: Vi har tre *ulike* egenverdier: 6, 15 og -15. Egenvektorer fra ulike egenrom er lineært uavhengige (fra teorien om egenvektorer). Derfor har vi tre lineært uavhengige egenvektorer fra de ulike egenrommene. Tre lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^3$ spenner automatisk. Dermed har vi en basis av egenvektorer (et basiselement fra hvert egenrom). Hver vektor i $\mathbb{R}^3$ kan altså skives som en (unik) lineærkombinasjon av tre egenvektorer tilhørende de tre egenverdiene. Men da vet vi at det ikke kan finnes egenvektorer i $\mathbb{R}^3$ tilhørende noen andre egenverdier av matrisen $3A$ (også fra teorien om egenvektorer).

A^2: Nå har vi bare to *ulike* egenverdier fordi $(\pm 5)^2 = 25$. Første del av argumentasjonen ovenfor garanterer derfor bare at vi har to lineært uavhengige egenvektorer. Men observasjonen viser at alle egenvektorene tilhørende 5 og -5 – betraktet som egenverdier til A – også er egenvektorer tilhørende 25 – betraktet som egenverdier til A^2. Siden egenvektorer tilhørende 5 og -5 er lineært uavhengige må egenrommet til 25 minst være todimensjonalt. Vi kan altså finne to lineært uavhengige egenvektorer i egenrommet til 25. Tilsammen med en egenvektor fra egenrommet til 4 har vi dermed tre lineært uavhengige egenvektorer av A^2. Nå er resten av argumentasjonen helt lik som siste del av argumentasjonen for $3A$.

Merk: Teorien som er brukt er oppsummert i Teorem **7.15.** fra forelesningsnotatene.

Oppgave 5 Bruk minste kvadrats metode til å finne en approksimasjon til likningssystemet

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 4y = 2 \\ 5x + 6y = 3 \end{cases}$$

På matriseform:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

hvor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Minste kvadraters metode: Løs likningen

$$A^\top A = A^\top \mathbf{b}.$$

Vi regner ut

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 & 44 \\ 44 & 56 \end{bmatrix}$$
$$A^\top \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 28 \end{bmatrix}.$$

Radreduser totalmatrisen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 35 & 44 & 22 \\ 44 & 56 & 28 \end{bmatrix} &\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{44}{35} & \frac{22}{35} \\ 44 & 56 & 28 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{44}{35} & \frac{22}{35} \\ 0 & \frac{24}{35} & \frac{12}{35} \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & \frac{44}{35} & \frac{22}{35} \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi ser direkte at $x_2 = \frac{1}{2}$. Innsatt i første likning får vi

$$x_1 + \frac{44}{35}\frac{1}{2} = \frac{22}{35}$$

som gir $x_1 = 0$. Minste kvadraters løsning er derfor $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Er dette en eksakt løsning?

$$A\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

Ja.

Oppgave 6 Den transponerte til rotasjonsmatrisen er

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

Bruk at $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ for å regne ut

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\cos^2\theta + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta + \cos\theta\sin\theta\\ \cos\theta\sin\theta - \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = I.\end{aligned}$$

Derfor er rotasjonsmatrisen – per definisjon – ortogonal.

Matrisen A beskrevet i oppgaveteksten tilfredstiller

$$A = VDV^\top$$

hvor

$$V = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},$$

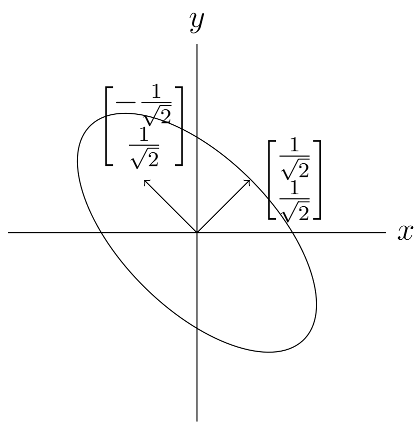
slik at

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos\theta & -2\sin\theta\\ \sin\theta & 2\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\cos^2\theta + 2\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta\\ \cos\theta\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta & 2\cos^2\theta + \sin^2\theta\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 + \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta\\ -\cos\theta\sin\theta & 1 + \cos^2\theta\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Når vi velger θ lik 45 grader får vi

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Denne matrisen skalerer med en faktor 1 langs $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$; en faktor 2 langs $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Derfor blir bildet av sirkelen en ellipse med halvakser av lengde 1 langs den første egenvektoren og lengde 2 langs den andre egenvektoren:



Oppgave 7 La A være følgende matrise:

$$A = \begin{bmatrix} -9 & 20 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -10 & 6 \end{bmatrix}$$

Finn alle vektorer $\mathbf{x}$ slik at $A^2\mathbf{x} = A\mathbf{x}$.

Regn ut A^2:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -9 & 20 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -10 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 20 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -10 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & -60 & 30 \\ 0 & 1 & 0 \\ -15 & 30 & -14 \end{bmatrix}$$

Skriv om:

$$
\begin{aligned}
A^2\mathbf{x} &= A\mathbf{x} \\
A^2\mathbf{x} - A\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\
(A^2 - A)\mathbf{x} &= 0
\end{aligned}
$$

Oppgaven er altså ekvivalent med å finne nullrommet til matrisen $A^2 - A$:

$$
A^2 - A = \begin{bmatrix} 31 & -60 & 30 \\ 0 & 1 & 0 \\ -15 & 30 & -14 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -9 & 20 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -10 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & -80 & 40 \\ 0 & 0 & 0 \\ -20 & 40 & -24 \end{bmatrix}.
$$

Som alltid radreduserer vi for å finne nullrommet:

$$
\begin{bmatrix} 40 & -80 & 40 \\ 0 & 0 & 0 \\ -20 & 40 & -24 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Likningen for nullrommet er $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Det er to frie variabler; vi kan for eksempel velge $x_2 = t$ og $x_3 = s$. Dette gir parametriseringen

$$
\{ \begin{bmatrix} 2t - s \\ t \\ s \end{bmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \}.
$$

Oppgave 8 En basis er definert til å være et en liste av vektorer som i) er lineært uavhengige og ii) spenner ut. Vi sjekker først i):

i): Polynomene p_1, p_2 og p_3 er lineært uavhengige hvis og bare hvis likningen (med x_i-ene som ukjente)

$$
x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 0
$$

kun har triviell løsning $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Derfor prøver vi å løse likningen. Først setter vi inn p_1, p_2 og p_3 i likningen, og skriver om litt:

$$
\begin{aligned}
x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 &= 0 \\
x_1(x^2 - 2) + x_2(-x^2 + x + 2) + x_3(3x^2 + x - 5) &= 0 \\
(x_1 - x_2 + 3x_3)x^2 + (x_2 + x_3)x + (-2x_1 + 2x_2 - 5x_3) &= 0
\end{aligned}
$$

Siste likning sier at et polynomet $(x_1 - x_2 + 3x_3)x^2 + (x_2 + x_3)x + (-2x_1 + 2x_2 - 5x_3)$ skal være lik null-polynomet. To polynom er like hvis og bare hvis de har like koeffisienter – og koeffisientene til null-polynomet er alle lik null. Dette gir likningssytemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases},$$

eller ekvivalent

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Radreduser matrisen:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Den reduserte matrisen har pivotelement i hver rad, dette betyr at likningen kun har triviell løsning $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Merk at dette også kan sjekkes direkte ved regning: Nederste rad gir $x_3 = 0$; andre rad gir deretter $x_2 = 0$; første rad gir til slutt $x_1 = 0$. Vi har dermed vist at den eneste løsningen på

$$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 0$$

er den trivielle løsningen, ekvivalent har vi vist at p_1, p_2 og p_3 er lineært uavhengige.

ii): Vi trenger ikke å sjekke dette direkte. I løpet av semesteret har vi vist at dimensjonen på $\mathcal{P}_2$ er lik tre. Dimensjonen er det maksimale antallet lineært uavhengige vektorer. Dermed vil alle lister av tre lineært uavhengige vektorer automatisk spenne ut $\mathcal{P}_2$ – hvis vi legger til en vektor blir den automatisk en lineærkombinasjon ettersom vi maksimalt kan ha tre lineært uavhengige vektorer.

Vi kan konkludere med at (p_1, p_2, p_3) er en basis for $\mathcal{P}_2$.

Ettersom (p_1, p_2, p_3) er en basis vet vi at det finnes unike koeffisienter x_1, x_2 og x_3 slik at $q = 4x^2 + x - 7$ tilfredstiller $q = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3$. Ved å sette inn for polynomene og bruke samme fremgangsmåte som i argumentasjonen for lineær uavhengighet ender vi opp med systemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -7 \end{cases}.$$

Radreduser tilhørende totalmatrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -5 & -7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vi ser at $x_3 = 1$; $x_2 + x_3 = 1$ som gir $x_2 = 0$; $x_1 - x_2 + 3x_3 = 4$ som gir $x_1 = 1$. Løsningen betyr at $q = p_1 + 0p_2 + p_3$ slik at

$$[q]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 9 Anta at A er diagonaliserbar. Vi ønsker å vise at determinanten til A er produktet av egenverdiene til A.

Vi vet at det finnes V og D, hvor

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

med egenverdiene til A langs diagonalen, slik at

$$A = VDV^{-1}.$$

Husk at $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ for alle kvadratiske matriser M og N. Dette gir at determinanten til A er lik determinanten til D:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(VDV^{-1}) = \det(V)\det(D)\det(V^{-1}) = \det(V)\det(V^{-1})\det(D) \\ &= \det(VV^{-1})\det(D) = \det(I)\det(D) = \det(D). \end{aligned}$$

Vi kan enkelt regne ut determinanten til en diagonalmatrise:

$$\det(A) = \det(D) = \det \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n.$$

Dette er akkurat hva vi ønsket å vise.

Oppgave 10 La $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være en lineærtransformasjon. Vis at T er surjektiv hvis og bare hvis det finnes en lineærtransformasjon $S\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ slik at $T(S(\mathbf{v})) = \mathbf{v}$ for alle vektorer $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^m$.

Husk: En lineærtransformasjon $L\colon V \to W$ er definert av hvordan den avbilder en gitt basis for V. Grunn: anta at $\{\mathbf{b}_i\}$ er en basis til V. Da kan en vilkårlig vektor $\mathbf{x}$ skrives som en unik lineærkombinasjon

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n.$$

Anvend L og bruk linearitet:

$$L(\mathbf{x}) = L(c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n) = c_1L(\mathbf{b}_1) + \cdots + c_nL(\mathbf{b}_n).$$

Vi vet altså hva L er dersom vi vet hva den sender en basis til.

Dette er en hvis og bare hvis påstand. Vi må derfor vise to implikasjoner.

Hvis T er surjektiv, så finnes S slik at $T(S(\mathbf{v})) = \mathbf{v}$ for alle vektorer $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^m$:

Vi må bruke at T er surjektiv til å konstruere en slik S. Velg en basis $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ for $\mathbb{R}^m$. Fordi T er surjektiv kan vi finne $\mathbf{x}_i$ slik at $T(\mathbf{x}_i) = \mathbf{b}_i$ for $i = 1, \ldots, m$. Basert på merknaden ovenfor, vet vi at vi kan definere en lineærtransformasjon $S\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ved å velge hva $S(\mathbf{b}_i)$ skal være for alle i. Velg $S(\mathbf{b}_i) = \mathbf{x}_i$ for alle i. Skriv en vilkårlig vektor $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^m$ som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$$

av den valgte basisen til $\mathbb{R}^m$. Nå ser vi at

$$T(S(\mathbf{v})) = c_1T(S(\mathbf{b}_1)) + \cdots + c_nT(S(\mathbf{b}_n) = c_1T(\mathbf{x}_1) + \cdots + c_nT(\mathbf{x}_n) = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n = \mathbf{v}.$$

Dette viser første implikasjon.

Hvis det finnes S slik at $T(S(\mathbf{v})) = \mathbf{v}$ for alle vektorer $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^m$, så er T surjektiv: Ta en vilkårlig $\mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^m$. Vi må vise at det finnes en $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^m$ slik at $T(\mathbf{x}) = \mathbf{v}$. Vi vet jo at $T(S(\mathbf{v})) = \mathbf{v}$. Men dette betyr jo at vi kan ta $\mathbf{x} = S(\mathbf{v})$. Dette viser andre implikasjon.

Vi har vist begge implikasjonene. Beviset er ferdig.