Løsningsforslag

Oppgave 1 Vi setter opp totalmatrisen og gausseliminerer:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 28 \\ -2 & 5 & -4 & -20 \\ -1 & 1 & -1 & -10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 28 \\ 0 & 3 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 28 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 18 \end{array}\right]$$

Den siste matrisen her er på redusert trappeform, og vi får entydig løsning:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 12 \\ z = 18 \end{cases}$$

(Hvorfor valgte vi akkurat disse tallene? Fordi eksamenen var den x-te dagen i den y-te måneden i år totusenog$z$.)

Oppgave 2 Vi skal finne ut to ting: Om vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige, og om $\mathbf{b}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$. Vi kan besvare begge spørsmålene ved å gausseliminere totalmatrisen $\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{b} \end{array}\right]$. Vi gjør dette:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & -9 \\ -6 & 4 & -8 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

Vi ser at vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ ikke er lineært uavhengige, siden det ikke er noe pivotelement i den andre kolonnen. Vektoren $\mathbf{b}$ er ikke en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$, siden vi får den selvmotsigende likningen $0 = -5$ fra siste rad.

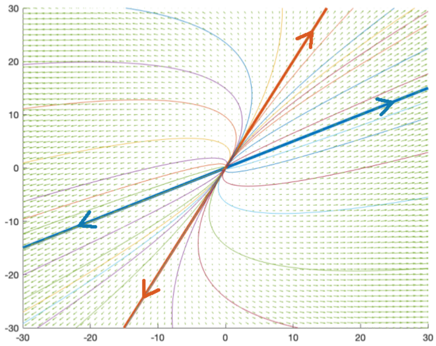
Begge spørsmålene i oppgaven har altså svaret *nei*.

Oppgave 3 Likningssystemet kan skrives på matriseform slik:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Egenverdiene til matrisen er 3 og 6, med egenvektorer henholdsvis $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ og $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. Den generelle løsningen av systemet er

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t}.$$



Fasediagram

Oppgave 4 Vi finner først andregradspolynomet $p(x) = ax^2 + bx + c$ som passer eksakt til de tre punktene. Da må vi ha

$$p(0) = -1, \quad p(1) = 1 \quad \text{og} \quad p(2) = 7,$$

så vi kan sette opp likningssystemet

$$\begin{cases} \phantom{4a + 2b + {}} c = -1 \\ a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 7 \end{cases}$$

for koeffisientene i p. Dette systemet har én løsning: $a = 2$, $b = 0$ og $c = -1$. Polynomet blir altså $p(x) = 2x^2 - 1$.

Nå skal vi finne det førsteordens polynomet $q(x) = dx + e$ som passer best til punktene. Hvis q skulle passet eksakt til punktene, ville vi hatt

$$q(0) = -1, \quad q(1) = 1 \quad \text{og} \quad q(2) = 7,$$

som gir følgende likningssystem for koeffisientene:

$$\begin{cases} \phantom{2d + {}} e = -1 \\ d + e = 1 \\ 2d + e = 7 \end{cases}$$

Skrevet på matriseform ser det slik ut:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

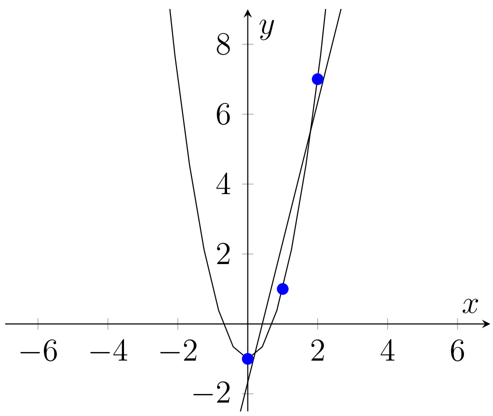
Vi finner den beste tilnærmingen til en løsning ved å bruke minste kvadraters metode. Da må vi gange begge sider av likningen med den transponerte

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

av koeffisientmatrisen. Det gir oss likningssystemet

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \end{bmatrix},$$

som har løsning $d = 4$ og $e = -\frac{5}{3}$. Polynomet er $q(x) = 4x - \frac{5}{3}$.



Oppgave 5 Vi skal finne alle 2×2-matriser X som er løsninger av likningen $AX = XA$, der

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

La oss kalle de fire tallene i matrisen X for x_1, x_2, x_3 og x_4:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

Vi skriver opp hvordan matrisene AX og XA ser ut:

$$AX = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9x_1 - 3x_3 & 9x_2 - 3x_4 \\ -3x_1 + 2x_3 & -3x_2 + 2x_4 \end{bmatrix}$$

$$XA = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9x_1 - 3x_2 & -3x_1 + 2x_2 \\ 9x_3 - 3x_4 & -3x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}$$

Likningen $AX = XA$ er altså ekvivalent med dette systemet av fire likninger:

$$\begin{cases} 9x_1 - 3x_3 = 9x_1 - 3x_2 \\ 9x_2 - 3x_4 = -3x_1 + 2x_2 \\ -3x_1 + 2x_3 = 9x_3 - 3x_4 \\ -3x_2 + 2x_4 = -3x_3 + 2x_4 \end{cases}$$

Vi flytter alt over til venstresiden i hver likning og forenkler:

$$\begin{cases} 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 - 3x_4 = 0 \\ -3x_1 - 7x_3 + 3x_4 = 0 \\ -3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Dette er et vanlig lineært likningssystem, så vi kan sette opp koeffisientmatrisen og gausseliminere:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & -7 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi får to frie variabler, og den generelle løsningen blir

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{7}{3}s + t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= s \\ x_4 &= t \end{aligned}\right\} \qquad \text{der } s \text{ og } t \text{ er vilkårlige tall.}$$

Dette betyr at alle løsninger av likningen $AX = XA$ er gitt ved

$$X = \begin{bmatrix} -7/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} t \qquad \text{der } s \text{ og } t \text{ er vilkårlige tall.}$$

Oppgave 6 La $U = \mathrm{Sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ være rommet vi skal finne en ortogonal basis for. Det er lett å se at $\mathbf{v}_4$ er en lineærkombinasjon av de andre vektorene, siden $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Det er heller ikke vanskelig å se at vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ er lineært uavhengige, slik at $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ er en basis for U.

Vi ortogonaliserer basisen med Gram–Schmidt-metoden:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{v}_2}{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 - 0 \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{v}_3}{\mathbf{u}_1^\top \mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{u}_2^\top \mathbf{v}_3}{\mathbf{u}_2^\top \mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{4}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 \\ 2/6 \\ 0 \\ 1/6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nå er $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ en ortogonal basis for U. Siden lengden av hver vektor ikke spiller noen rolle, kan vi alternativt erstatte $\mathbf{u}_3$ med $6 \cdot \mathbf{u}_3$ for å få penere tall; da ender vi opp med følgende ortogonale basis:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Oppgave 7 Her er to forskjellige forslag til løsning:

Løsning 1, der vi husker at diagonalisering gjør det enkelt å beregne potenser av matriser. Hvis vi klarer å diagonalisere matrisen R, så blir det enklere å regne ut R^{42}. Vi starter derfor med å finne egenverdier og egenvektorer. Det karakteristiske polynomet til R er

$$\begin{vmatrix} 1/2 - \lambda & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda \right)^2 + \frac{3}{4} = \lambda^2 - \lambda + 1,$$

og vi får egenverdiene

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \qquad \text{og} \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Vi regner ut, på vanlig måte, at vektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

er egenvektorer som hører til henholdsvis λ_1 og λ_2. Vi får altså en diagonalisering

$$R = VDV^{-1}$$

av matrisen R, der matrisene V og D er gitt ved:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \qquad\qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Nå vil vi regne ut D^{42}. Da er det en fordel å skrive de komplekse egenverdiene λ_1 og λ_2 på polarform:

$$\lambda_1 = e^{\frac{\pi}{3} i}$$
$$\lambda_2 = e^{-\frac{\pi}{3} i}$$

Dette gjør at vi får

$$\lambda_1^{42} = e^{42 \cdot \frac{\pi}{3} i} = e^{7 \cdot 2\pi i} = 1$$
$$\lambda_2^{42} = e^{42 \cdot (-\frac{\pi}{3} i)} = e^{(-7) \cdot 2\pi i} = 1,$$

slik at

$$D^{42} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{42} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Dette betyr at vi har:

$$R^{42} = VD^{42}V^{-1} = VI_2V^{-1} = VV^{-1} = I_2$$

Løsning 2, der vi ikke husker de der diagonaliseringsgreiene, men er litt lure isteden. Siden $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ og $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ser vi at matrisen R også kan skrives slik:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$$

Dette er en rotasjonsmatrise som roterer vektorer $\frac{\pi}{3}$ radianer med klokken. Å anvende denne matrisen seks ganger gir en full rotasjon, slik at $R^6\mathbf{v} = \mathbf{v}$ for alle vektorer $\mathbf{v}$. Det vil si at R^6 er identitetsmatrisen I_2, og vi får

$$R^{42} = \left(R^6\right)^7 = I_2^7 = I_2.$$

Oppgave 8 Vi følger standard metode for å finne kolonne- og nullrommet til A, så vi begynner med å gausseliminere:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & i & 5-3i \\ 4 & 2i & 10+2i \\ 2i & -1 & 4+6i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & i & 5-3i \\ 0 & 0 & 8i \\ 0 & 0 & 1+i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & i & 5-3i \\ 0 & 0 & 8i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivotelement i første og tredje kolonne viser at

$$\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5-3i \\ 10+2i \\ 4+6i \end{bmatrix} \right)$$

er en basis for $\operatorname{Col} A$.

Nullrommet består av alle løsninger av likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminasjonen over gir at denne likningen kan skrives som følgende system:

$$\begin{cases} ix_2 + 2x_1 = 0 \\ \qquad\quad x_3 = 0 \end{cases}$$

Den generelle løsningen blir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -i/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \qquad \text{der } t \text{ er et vilkårlig komplekst tall.}$$

Dermed er

$$\left(\begin{bmatrix} -i/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

en basis for Null A.

Til slutt skal vi finne alle vektorer $\mathbf{v}$ i $\mathbb{C}^3$ slik at $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ og $\|\mathbf{v}\| = 1$. At $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ er det samme som at $\mathbf{v}$ ligger i nullrommet til A, og vi har allerede funnet en basis for nullrommet. For å finne vektorer i nullrommet som har lengde 1, normaliserer vi basisvektoren vår. Lengden av basisvektoren vi fant er:

$$\left\| \begin{bmatrix} -i/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{i}{2}\right)\left(-\frac{i}{2}\right) + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Det vil si at vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -i/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

er en vektor med lengde 1 som utspenner Null A. Alle vektorer i nullrommet er på formen $t\mathbf{u}$ der t er et komplekst tall, og lengden av en slik vektor blir

$$\|t\mathbf{u}\| = |t|\|u\| = |t|,$$

slik at lengden er 1 hvis og bare hvis tallet t har absoluttverdi 1. De komplekse tallene som har absoluttverdi 1 er alle tallene på formen $e^{i\theta}$ for en vilkårlig vinkel θ. Alle vektorene $\mathbf{v}$ som er slik at $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ og $\|\mathbf{v}\| = 1$ blir altså:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -i/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\theta} \qquad \text{for en vilkårlig } \theta \text{ i intervallet } [0, 2\pi).$$

Oppgave 9 Vi skal vise at funksjonen T er en lineærtransformasjon. Vi kan først legge merke til at transponeringsoperasjonen er lineær, altså at

$$(M+N)^\top = M^\top + N^\top \qquad \text{og} \qquad (kM)^\top = k(M^\top)$$

for alle 2×2-matriser M og N, og alle skalarer k. (Dette er sant for matriser av alle størrelser, men i denne oppgaven trenger vi bare å se på 2×2-matriser.) Vi viser at dette stemmer. La

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \text{og} \qquad N = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

være to matriser i $\mathcal{M}_2$, og la k være et tall. Da har vi:

$$(M+N)^\top = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} a+a' & c+c' \\ b+b' & d+d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} = M^\top + N^\top$$

$$(kM)^\top = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} ka & kc \\ kb & kd \end{bmatrix} = k(M^\top)$$

Ved å bruke at transponering er lineært, som vi nettopp har vist, blir det lett å vise at T er en lineærtransformasjon. For alle matriser M og N i $\mathcal{M}_2$, og alle skalarer k, har vi

$$\begin{aligned} T(M+N) &= (M+N) - (M+N)^\top = M + N - M^\top - N^\top \\ &= (M - M^\top) + (N - N^\top) = T(M) + T(N) \end{aligned}$$

og

$$T(kM) = kM - (kM)^\top = kM - k(M^\top) = k(M - M^\top) = kT(M),$$

som vil si at T er en lineærtransformasjon.

Videre skal vi finne kjernen $\ker T$ og bildet $\operatorname{im} T$. Kjernen består av alle matriser som T sender til nullmatrisen, altså alle matriser M slik at $M - M^\top$ er nullmatrisen. Dette er det samme som at $M = M^\top$. Kjernen til T består altså av alle symmetriske matriser i $\mathcal{M}_2$.

Bildet består av alle matriser som vi kan skrive som $T(M)$ for en matrise M. Hvis

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

er en vilkårlig matrise, så er

$$T(M) = M - M^\top = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b-c \\ c-b & 0 \end{bmatrix}$$

Siden b og c kan være hvilke som helst reelle tall, ser vi at bildet av T består av alle matriser på formen

$$\begin{bmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{bmatrix},$$

der t er et vilkårlig tall.

Oppgave 10 La oss gi navn til kolonnene i matrisene A, B og C:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_p \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_p \end{bmatrix}$$

Vi kan først legge merke til at likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun har den trivielle løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Hvordan ser vi det? Uttrykket $A\mathbf{x}$ er per definisjon lik en lineærkombinasjon av kolonnene i A med tallene i $\mathbf{x}$ som vekter:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n$$

Men vi vet at kolonnene i A er lineært uavhengige, som betyr at likningen

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{0}$$

kun har den trivielle løsningen. Dermed har likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ også bare den trivielle løsningen.

Nå går vi løs på å bevise det oppgaven ber om. Vi antar at $AB = AC$. Da har vi for hver i (fra 1 til p) at $A\mathbf{b}_i = A\mathbf{c}_i$, og det betyr at

$$A(\mathbf{b}_i - \mathbf{c}_i) = \mathbf{0}.$$

Men vi har allerede vist at likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ kun har den trivielle løsningen, så nå får vi at

$$\mathbf{b}_i - \mathbf{c}_i = \mathbf{0}.$$

Dermed er $\mathbf{b}_i = \mathbf{c}_i$. Dette holder for alle i, slik at kolonnene i B er nøyaktig samme vektorer som kolonnene i C. Vi har altså vist at $B = C$.